

专题名称：平面向量的应用

【学习目标】1.利用不同方法求平面向量的数量积；
2.利用代数法和几何法解决向量问题.

【预备知识】1.平面向量基本定理；
2.平面向量的数量积公式.

【典型例题】

例 1 在矩形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = 4, |\overrightarrow{AD}| = 2$. 若点 M, N 分别是 CD, BC 的中点, 则

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} =$$

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1

思考:求向量的数量积的方法有哪些?

平面向量数量积问题有三大类解法: 基向量法, 坐标法和数量积的定义.

思路 1: 基向量法 (向量的分解与合成)

由题意作出图形, 如图所示:

由图及题意, 可得:

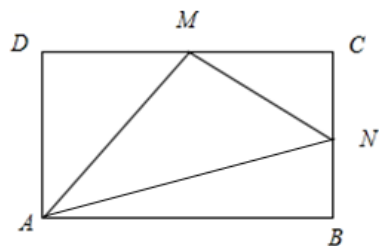
$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AD}|^2 + \frac{1}{4} \cdot |\overrightarrow{AB}|^2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 16 = 2.$$



小结: 利用平面向量基本定理, 用已知向量作为基底向量, 求向量数量积.

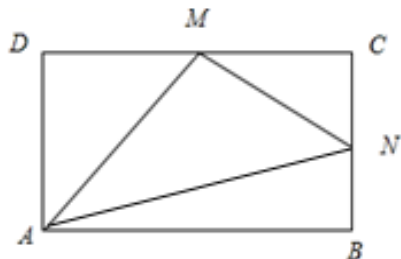
思路 2: 定义法

连接 AN , 由题易得,

$$AM = 2\sqrt{2}, MN = \sqrt{5}, AN = \sqrt{17}.$$

由余弦定理得

$$\cos \angle AMN = \frac{AM^2 + NM^2 - AN^2}{2AN \cdot NM} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$



因此, $\cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MN} \rangle = \frac{\sqrt{10}}{10}$

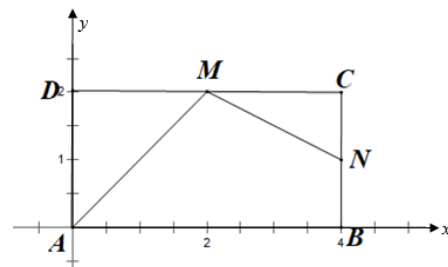
$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{MN}| \cos \langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MN} \rangle = 2$$

思路 3: 坐标法

建立平面直角坐标, 已 A 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 由题易知

$$A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(0,2), M(2,2), N(4,1).$$

$$\text{因此, } \overrightarrow{AM} = (2,2), \overrightarrow{MN} = (2,-1), \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MN} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$$



总结: 平面向量问题有三大类解法: 基向量法, 坐标法和数量积的定义. 对比上述三种方法, 一般情况下, 在便于建立坐标系的情况下, 使用坐标方法更为方便.

练习 1 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp AB$, $\overrightarrow{BC} = \sqrt{3} \overrightarrow{BD}$, $|\overrightarrow{AD}| = 1$, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} =$ _____

$$\text{解析: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

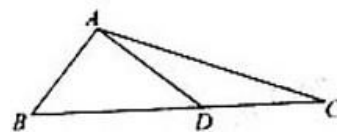
$$= \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \sqrt{3} \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \sqrt{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \sqrt{3} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \sqrt{3} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \sqrt{3}$$



练习 2 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 以 B 为圆心的圆与直线 AC 相切.

若点 P 是圆 B 上的动点, 则 $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP}$ 的最大值是

(A) $2\sqrt{2}$

(B) $4\sqrt{2}$

(C) 4

(D) 8

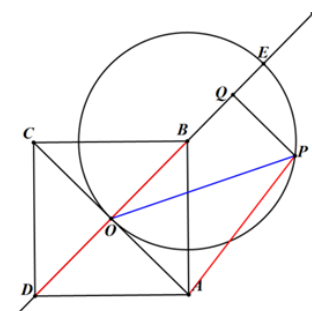
方法一: 利用数量积的几何意义

如图, 取正方形对角线的交点为 O , 连 OP ,

过点 P 作 $PQ \perp$ 直线 DB 于点 Q

因为 $AC \perp BD$, 所以 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\overrightarrow{DB}$ 上的投影为 $|\overrightarrow{OQ}|$,

$$\text{即 } \overrightarrow{AP} \cdot \cos \langle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AP} \rangle = |\overrightarrow{OQ}|$$



从而有：

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{AP}| \cos \langle \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AP} \rangle \\ &= |\overrightarrow{DB}| |\overrightarrow{OQ}| \\ &= 2\sqrt{2} |\overrightarrow{OQ}| \end{aligned}$$

当点 P 在圆上运动，点 Q 随之在直径 OE 上运动，可知当点 P 运动到点 E 时， $|\overrightarrow{OQ}|$ 取到最

大值即为 $2\sqrt{2}$ ，从而 $(\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP})_{\max} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 8$ 。

方法二：利用向量的坐标运算

如图，以点 D 为原点， DA 为 x 轴， DC 为 y 轴建立平面直角坐标系

则有点 B 的坐标为 $(2, 2)$ ，点 A 的坐标为 $(2, 0)$ ，

圆 B 的方程为： $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$

设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) ，满足圆 B 的方程即 $(x_0-2)^2 + (y_0-2)^2 = 2$

利用三角换元可得： $x_0 = \sqrt{2} \cos \theta + 2$ ， $y_0 = \sqrt{2} \sin \theta + 2$ ， $\theta \in [0, 2\pi)$

又因为 $\overrightarrow{AP} = (x_0 - 2, y_0)$ ， $\overrightarrow{DB} = (2, 2)$ ，

所以， $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP} = 2x_0 - 4 + 2y_0 = 2\sqrt{2} \sin \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta + 4 = 4\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + 4$ 。

当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时， $(\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AP})_{\max} = 4 + 4 = 8$ 。

例 2 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 是平面内两个互相垂直的单位向量，若向量 $\mathbf{c}$ 满足 $(\mathbf{a}-\mathbf{c})(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$ ，则 $|\mathbf{c}|$ 的最大值是_____

思路 1：代数法

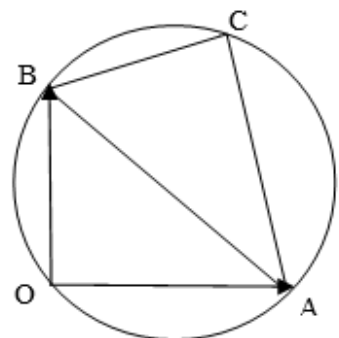
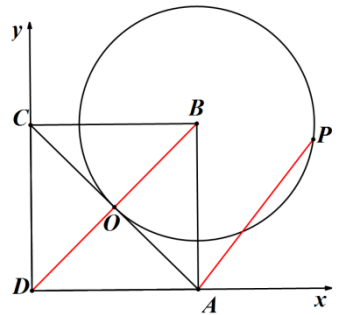
设 $\mathbf{a} = (1, 0), \mathbf{b} = (0, 1), \mathbf{c} = (x, y)$

则 $(\mathbf{a}-\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{c}) = 0$ ，即 $(1-x, -y) \cdot (-x, 1-y) = 0$ 。

整理得 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ ，即以 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为圆心， $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆上，且该圆过原点。

所求的值就转化为上述圆上的点到原点距离的最大值，根据

图形，最大值为 $\sqrt{2}$ 。



思路 2: 几何法

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}, \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{OC},$$

$$\text{则 } (\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

所以, C 点在以 AB 为直径的圆上, 且 O 在圆上 ($\angle AOB = 90^\circ$).

$$\text{因此, } |\mathbf{c}| = |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2}.$$

小结: 从向量的数量积为 0 入手, 转化为代数式子或者几何图形, 层层剖析, 进而求出最值.

练习 3 已知点 P 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在平面内一点,

若 $|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = 1$, 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最大值是 ()

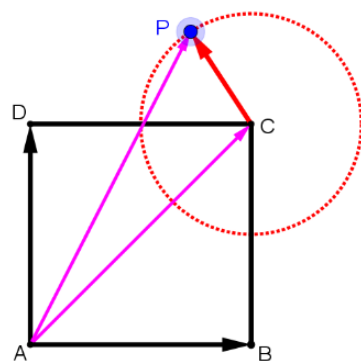
- (A) $2\sqrt{2} - 1$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $2\sqrt{2} + 1$ (D) $2\sqrt{2} + 2$

解析: 因为 $|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = 1$, 所以 $|\overrightarrow{AP} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})| = 1$

所以 $|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CP}| = 1$, 如右图所示:

所以点 P 在以 C 为圆心, 半径为 1 的圆上,

因此 $|\overrightarrow{AP}|_{\max} = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CP}| = 2\sqrt{2} + 1$, 选择 C.



【小结提升】

通过本节课, 你有哪些收获呢?

1. 利用不同方法求向量的数量积;
2. 利用代数法和几何法解决向量问题, 体现了数形结合的数学方法.