复数专题——学习任务单

学习目标：

1. 通过本专题的学习进一步巩固复数的代数表示及其几何意义，理解两个复数相等的含义。
2. 巩固复数代数表示的四则运算、复数加减法运算的几何意义，提升直观想象、数学运算的素养。

预备知识：

1. 复数的有关概念

内容	意义	备注
复数的概念	形如 $a+bi(a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})$ 的数叫复数，其中实部为 a ，虚部为 b	若 $b=0$ ，则 $a+bi$ 为实数；若 $a=0$ 且 $b \neq 0$ ，则 $a+bi$ 为纯虚数
复数相等	$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d(a, b, c, d \in \mathbf{R})$	/
共轭复数	$a+bi$ 与 $c+di$ 共轭 $\Leftrightarrow a=c$ 且 $b=-d(a, b, c, d \in \mathbf{R})$	
复平面	建立平面直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面， x 轴叫实轴， y 轴叫虚轴	实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数，各象限内的点都表示虚数
复数的模	设 $\vec{OZ}$ 对应的复数为 $z=a+bi$ ，则向量 $\vec{OZ}$ 的长度叫做复数 $z=a+bi$ 的模， $(a, b \in \mathbf{R})$	$ z = a+bi =\sqrt{a^2+b^2}$

2. 复数的几何意义

复数集 $\mathbf{C}$ 和复平面内所有的点组成的集合是一一对应的，复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内所有以原点 O 为起点的向量组成的集合也是一一对应的，即

(1) 复数 $z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{复平面内的点 } Z(a, b)(a, b \in \mathbf{R})$.

(2) 复数 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R}) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{平面向量 } \vec{OZ}$.

3. 复数的运算

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ ，则

(1)加法: $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;

(2)减法: $z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$;

(3)乘法: $z_1z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

(4)除法: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$

$$=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}(c+di\neq 0).$$

典型例题

例 1

(1) . 已知复数 $(1+2i)i=a+bi$, $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$, 则 $a+b=(\quad)$

- A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

分析: 本题考查复数相等的条件

解析: 因为 $(1+2i)i=-2+i$, 所以 $a=-2$, $b=1$, 则 $a+b=-1$, 故选 B.

(2) 若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)i$ 是纯虚数, 则实数 a 的值为 $(\quad)$

- A. 1 B. 2 C. 1 或 2 D. -1

分析: 本题考查复数的分类, 可转化为复数的概念进行求解

复数 $z=a+bi$ (其中 $a, b\in\mathbf{R}$) 中 a 叫 z 的实部, b 叫 z 的虚部;

z 为实数 $\Leftrightarrow b=0$; z 为纯虚数 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$

解析: 依题意, 有 $\begin{cases} a^2-3a+2=0, \\ a-1\neq 0, \end{cases}$ 解得 $a=2$, 故选 B.

(3) . 若复数 $z=\frac{1+i}{1+ai}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为 $(\quad)$

- A. 1 B. 0 C. $-\frac{1}{2}$ D. -1

分析: 本题考查复数的概念及复数相等的条件

解析: 设 $z=bi$, $b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0$,

则 $\frac{1+i}{1+ai}=bi$, 得到 $1+i=-ab+bi$,

$\therefore 1=-ab$, 且 $1=b$, 解得 $a=-1$, 故选 D.

解析：由图可得 $Z(1, -1)$ ，即 $z=1-i$ ，所以 $z+\frac{4}{z}=1-i+\frac{4}{1-i}=1-i+\frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$$=1-i+\frac{4+4i}{2}=1-i+2+2i=3+i. \text{ 故选 D.}$$

(4) 满足条件 $|z-i|=|3+4i|$ 的复数 z 在复平面上对应点的轨迹是 ()

- A. 一条直线 B. 两条直线 C. 圆 D. 椭圆

解法一：由题意知 $|z-i|=5$

设 $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$) 则 $z-i=x+(y-1)i$,

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=5, \quad x^2+(y-1)^2=25 \quad \text{故选 C.}$$

解法二： Z 对应点 (x, y) 与 i 对应点 $(0, 1)$ 之间的距离为 5，由圆的定义知选 C

小结提升：

(4) . 复数 $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}} Z(a, b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \vec{OZ}=(a, b)$.

(5) . 由于复数、点、向量之间建立了一一对应的关系，因此可把复数、向量与解析几何联系在一起，解题时可运用数形结合的方法，使问题的解决更加直观.

例 3

计算：
$$\frac{(1-4i)(1+i)+2+4i}{3+4i}.$$

分析：本题考查复数代数形式的四则运算

解析：原式 $=\frac{1+i-4i-4i^2+2+4i}{3+4i}=\frac{7+i}{3+4i}$
 $=\frac{(7+i)(3-4i)}{3^2+4^2}=\frac{21+4+3i-28i}{25}$
 $=\frac{25-25i}{25}=1-i.$

小结提升：

(6). 复数的乘法类似于多项式的四则运算，可将含有虚数单位 i 的看作一类同类项，不含 i 的看作另一类同类项，分别合并即可.

(7). 复数除法的关键是分子分母同乘以分母的共轭复数，将分母实数化，解题时要注意把 i 的幂写成最简形式.

(8). 复数的运算与复数概念以及复数几何意义的综合题. 先利用复数的运算法则

化简，一般化为 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 的形式，再结合相关定义、意义解答.

学法指导：

- 1.复数 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 是由它的实部和虚部唯一确定的，两个复数相等的充要条件是把复数问题转化为实数问题的主要方法.
- 2.复数的代数形式的运算主要有加、减、乘、除及求低次幂. 除法实际上是分母实数化的过程.
- 3.复数的几何意义实现了代数与几何图形的转化，体现了数形结合思想
- 4.复数的虚部是指在 $a+bi(a, b \in \mathbf{R})$ 中的实数 b ，即虚部是一个实数.