【扩展提升任务答案】

1.解: (I) $d_1=d_2=1$, $d_3=d_4=3$.

(II) (充分性) 因为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 且 $d \geq 0$, 所以

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots.$$

因此 $A_n = a_n$, $B_n = a_{n+1}$, $d_n = a_n - a_{n+1} = -d$ ($n=1, 2, 3, \dots$).

(必要性) 因为 $d_n = -d \leq 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 所以 $A_n = B_n + d_n \leq B_n$.

又因为 $a_n \leq A_n$, $a_{n+1} \geq B_n$,

所以 $a_n \leq a_{n+1}$.

于是, $A_n = a_n$, $B_n = a_{n+1}$.

因此 $a_{n+1} - a_n = B_n - A_n = -d_n = d$,

即 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列.

(III) 因为 $a_1=2$, $d_1=1$, 所以 $A_1=a_1=2$, $B_1=A_1-d_1=1$.

故对任意 $n \geq 1$, $a_n \geq B_1=1$.

假设 $\{a_n\}$ ($n \geq 2$) 中存在大于 2 的项.

设 m 为满足 $a_m > 2$ 的最小正整数,

则 $m \geq 2$, 并且对任意 $1 \leq k < m$, $a_k \leq 2$.

又因为 $a_1=2$, 所以 $A_{m-1}=2$, 且 $A_m=a_m > 2$.

于是, $B_m = A_m - d_m > 2 - 1 = 1$, $B_{m-1} = \min\{a_m, B_m\} \geq 2$.

故 $d_{m-1} = A_{m-1} - B_{m-1} \leq 2 - 2 = 0$, 与 $d_{m-1}=1$ 矛盾.

所以对于任意 $n \geq 1$, 有 $a_n \leq 2$, 即非负整数列 $\{a_n\}$ 的各项只能为 1 或 2.

因为对任意 $n \geq 1$, $a_n \leq 2 = a_1$,

所以 $A_n = 2$.

故 $B_n = A_n - d_n = 2 - 1 = 1$.

因此对于任意正整数 n , 存在 m 满足 $m > n$, 且 $a_m = 1$, 即数列 $\{a_n\}$ 有无穷多项为 1.