

【扩展提升任务】

1. 已知 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的无穷数列. 该数列前 n 项的最大值记为 A_n , 第 n 项之后各项 $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots$ 的最小值记为 B_n , $d_n = A_n - B_n$.

(I) 若 $\{a_n\}$ 为 $2, 1, 4, 3, 2, 1, 4, 3, \dots$, 是一个周期为 4 的数列 (即对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+4} = a_n$), 写出 d_1, d_2, d_3, d_4 的值;

(II) 设 d 是非负整数. 证明: $d_n = -d$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 的充分必要条件为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列;

(III) 证明: 若 $a_1 = 2$, $d_n = 1$ ($n=1, 2, 3, \dots$), 则 $\{a_n\}$ 的项只能是 1 或者 2, 且有无穷多项为 1.

要求:

- (1) 在求解第 (III) 问, 尝试列举出数列 $\{a_n\}$ 的前若干项的例子, 并从中找出论证的关键点.
- (2) 对比此题和学习指南中的例题, 找出求解过程中所使用的相同方法.