[课时作业参考答案]

已知函数 $f(x)=e^{x}-\ln(x+m)$.

(1)设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m ，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $m\le 2$ 时，证明 $f(x)>0$.

解析：(1) $f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+m}$

由 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点得 $f'(0)=0$，所以 $m=1$.

于是 $f(x)=e^{x}-\ln(x+1)$，定义域为 $(-1，+\infty)$，

$f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$.

函数 $f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+1}$ 在 $(-1，+\infty)$ 单调递增，

且 $f'(0)=0$，因此当 $x\in(-1，0)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(0，+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-1，0)$ 单调递减，在 $(0，+\infty)$ 单调递增.

(2)证明：

方法一：

当 $m\le 2$，$x\in(-m，+\infty)$ 时，$\ln(x+m)\le\ln(x+2)$，

故只需证明当 $m=2$ 时，$f(x)>0$.

当 $m=2$ 时，函数 $f'(x)=e^{x}-\dfrac{1}{x+2}$ 在 $(-2，+\infty)$ 单调递增.

又 $f'(-1)<0$，$f'(0)>0$，

故 $f'(x)=0$ 在 $(-2，+\infty)$ 有唯一实根 x_0，且 $x_0\in(-1，0)$.

当 $x\in(-2，x_0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(x_0，+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值.

由 $f'(x_0)=0$ 得 $ex_0=\dfrac{1}{x_0+2}$，$\ln(x_0+2)=-x_0$，

故 $f(x)\ge f(x_0)=\dfrac{1}{x_0+2}+x_0=\dfrac{(x_0+1)^2}{x_0+2}>0$.

综上，当 $m\le 2$ 时，$f(x)>0$.

方法二：$\because$ $x>-1$ 时，$\dfrac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$.

$\therefore$ $x+1\ge\ln(x+2)$，当且仅当 $x=-1$ 取等号.

又 $\because$ $\mathrm{m}\le 2$

$\therefore$ $\ln(x+2)\ge\ln(x+m)$

又 $\because$ $e^{x}\ge x+1$，当且仅当 $x=0$ 取等号.

$\therefore e^{x} \ge x+1 \ge \ln(x+2) \ge \ln(x+m)$

不等式中前两个等号不可能同时取得.

$\therefore e^{x} > \ln(x+m)$.

即 $e^{x} - \ln(x+m) > 0$ 成立.

(上式中，$x > -1$ 时，$\ln(x+1) \le x$，

$x \in R$ 时，$e^{x} \ge x+1$，均可以用导数知识证明)