

[扩展提升参考答案]

已知函数 $f(x) = x - a \ln x (a \in R)$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程;

(2) 设函数 $h(x) = f(x) + \frac{1+a}{x}$, 求函数 $h(x)$ 的单调区间;

(3) 若 $g(x) = -\frac{1+a}{x}$, 在 $[1, e] (e = 2.71728 \cdots)$ 上存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) \leq g(x_0)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【思路引导】

(1) 中求的是在 $x=1$ 的切线方程, 所以直接出函数在 $x=1$ 的导数, 和切点即可解决.

(2) 求单调性区间, 先注意定义域, 再求导数等于 0 的根, 一般对于含参的问题, 我们先看是否能因式分解.

(3) 存在 $f(x_0) \leq g(x_0)$ 成立, 先变形为 $f(x_0) - g(x_0) \leq 0$, 从而构造函数

$h(x) = x - a \ln x + \frac{1+a}{x}$ 在 $[1, e]$ 上的最小值 $[h(x)]_{\min} \leq 0$. 同时注意第 (2) 问已求对本问的应用.

解析: (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = x - 2 \ln x, f(1) = 1$, 切点 $(1, 1)$,

所以 $f'(x) = 1 - \frac{2}{x}$, 所以 $k = f'(1) = 1 - 2 = -1$.

所以曲线 $f(x)$ 在 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = -1(x - 1)$, 即 $x + y - 2 = 0$.

(2) $h(x) = x - a \ln x + \frac{1+a}{x}$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

$$h'(x) = 1 - \frac{a}{x} - \frac{1+a}{x^2} = \frac{x^2 - ax - (1+a)}{x^2} = \frac{(x+1)[x-(1+a)]}{x^2},$$

① 当 $a+1 > 0$, 即 $a > -1$ 时, 令 $h'(x) > 0$, 因为 $x > 0$, 所以 $x > 1+a$,

令 $h'(x) < 0$, 因为 $x > 0$, 所以 $0 < x < 1+a$.

② 当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, $h'(x) > 0$ 恒成立,

综上, 当 $a > -1$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调增区间为 $(a+1, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, a+1)$;

当 $a \leq -1$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调减区间.

(3) 由题意可知, 在 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $f(x_0) \leq g(x_0)$ 成立, 即在 $[1, e]$ 上存在一

点 x_0 , 使得 $h(x_0) \leq 0$, 即函数 $h(x) = x - a \ln x + \frac{1+a}{x}$ 在 $[1, e]$ 上的最小值 $[h(x)]_{\min} \leq 0$.

由第(2)问,

①当 $a+1 \geq e$, 即 $a \geq e-1$ 时, $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

所以 $[h(x)]_{\min} = h(e) = e - \frac{1+a}{e} \leq 0$, 所以 $a \geq \frac{e^2+1}{e-1}$, 因为 $\frac{e^2+1}{e-1} > e-1$, 所以

$$a \geq \frac{e^2+1}{e-1};$$

②当 $a+1 \leq 1$, 即 $a \leq 0$ 时, $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 所以 $[h(x)]_{\min} = h(1) = 1+1+a \leq 0$,

所以 $a \leq -2$;

③当 $1 < a+1 < e$, 即 $0 < a < e-1$ 时, $[h(x)]_{\min} = h(1+a) = 2+a-a\ln(1+a) \leq 0$,

因为 $0 < \ln(1+a) < 1$, 所以 $0 < a\ln(1+a) < a$, 所以 $h(1+a) > 2$, 此时不存在 x_0 使得

$h(x_0) \leq 0$ 成立.