

导数的综合应用

【学法指导】

导数的应用问题是高考考查的重点和热点,由于导数是高等数学的基础,对于中学生来说运算量大、思维密度强、解题方法灵活、综合性强等特点,成为学生感到头疼和茫然的一类型题,究其原因,其一,基础知识掌握不够到位(导数的几何意义、导数的应用),其二,没有形成具体的解题格式和套路,从而导致学生产生恐惧心理,成为考试一大障碍,我们这一讲就该类题型和相应的对策加以总结.

【学习目标】

- 1、同学们通过本节课的分析,争取能够明确审题的策略;
- 2、同学们通过本节课的分析,争取能够学会处理不等式证明问题中的转化策略;
- 3、同学们通过作业中一些比较综合的练习,争取能够领悟一些基本的处理不等式证明的方法;
- 4、同学们通过这一个专题的努力探索,争取能够把握知识之间的横向、纵向的关联.

【学习重点】

一些基本的转化方法.

【学习难点】

知识之间的关联和综合应用能力的提升.

典例分析

例. 设函数 $f(x) = ae^x \ln x + \frac{be^{x-1}}{x}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 $y = e(x-1) + 2$.

(I) 求 a, b ;

(II) 证明: $f(x) > 1$.

每拿到一道题,我们要做的是什么呢?

审题(熟悉题目、深入理解题目) → 设计方案(寻求有用思路) → 执行方案 → 回顾(反思)

分析: 第一问考查导数的几何意义,面向全体考生;注意函数问题定义域优先的原则!

解: (I) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = ae^x \ln x + \frac{a}{x} e^x - \frac{b}{x^2} e^{x-1} + \frac{b}{x} e^{x-1}$$

$$\text{由题意可得 } f(1) = 2, f'(1) = e$$

$$\text{故 } a = 1, b = 2.$$

(II) 分析: 常规方法证明 $f(x) = e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1$,

即证: $f(x)_{\min} > 1$

$$\text{所以 } f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{2xe^{x-1} - 2e^{x-1}}{x^2}$$

$$\text{所以 } f'(x) = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) + \frac{2e^{x-1}(x-1)}{x^2},$$

太复杂了!! 无从下手!!

再次分析: 证明 $e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1$ 难点在哪里?

困难在于存在 $e^x \ln x$, 求导后还存在 $e^x \ln x$, 麻烦!!

初步思考必须把 e^x 与 $\ln x$ 分离, 怎么分离?

不外乎加减乘除!!

$$\text{仔细观察: } e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1,$$

其中 $e^x > 0$, 定义域别忘了, 还有 $x > 0$;

$$\text{设计方案: (1) } e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1 \Leftrightarrow xe^x \ln x + 2e^{x-1} > x$$

$$\Leftrightarrow x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e} \quad (\text{方案一})$$

$$\Leftrightarrow x \ln x - xe^{-x} > -\frac{2}{e} \quad (\text{方案二})$$

执行方案一:

$$\text{由 (I) 知, } f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x} e^{x-1},$$

$$\because e^x > 0, x > 0,$$

$$\text{从而 } f(x) > 1 \text{ 等价于 } x \ln x > xe^{-x} - \frac{2}{e}$$

$$\text{设 } g(x) = x \cdot \ln x, \quad h(x) = x \cdot e^{-x} - \frac{2}{e}.$$

若 $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$, 是否可行? 试一试吧!

$$g(x) = x \cdot \ln x, \quad g'(x) = 1 + \ln x.$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, 注意 “ $x > 0$ ”

$$h(x) = x \cdot e^{-x} - \frac{2}{e}, h'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$.

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore h(x)_{\max} = h(1) = -\frac{1}{e}$.

综上, $x > 0$ 时, $g(x) \geq -\frac{1}{e}$, $h(x) \leq -\frac{1}{e}$,

而两个等号不可能同时取到,

所以 $g(x) > h(x)$, 即 $f(x) > 1$.

执行方案二: 欲证 $e^x \cdot \ln x + \frac{2e^x}{ex} > 1$

即证 $x \cdot \ln x - x \cdot e^{-x} > -\frac{2}{e}$. 主要还是等价变形.

设 $g(x) = x \cdot \ln x$. 则 $g(e^{-x}) = e^{-x} \cdot \ln e^{-x} = -x \cdot e^{-x}$.

(这里关键是注意到 $g(x) = x \cdot \ln x$ 与 $g(e^{-x}) = -x \cdot e^{-x}$ 之间隐含着复合函数的关系)

$\therefore$ 只需证明 $g(x) + g(e^{-x}) > -\frac{2}{e}$.

由方法一可知 $\forall x \in (0, +\infty)$, $g(x) \geq -\frac{1}{e}$, 当且仅当 $x = \frac{1}{e}$ 取等号.

$\therefore g(e^{-x}) \geq -\frac{1}{e}$, 当且仅当 $x = 1$ 取等号.

$\therefore g(x) + g(e^{-x}) > -\frac{2}{e}$, (两个等号不能同时成立)

$$\therefore f(x) > 1.$$

点评：这种方法实在很难想！

分析：题目中有 $e^x, \ln x, x$ ，应该联想到重要熟知的不等式 $e^x \geq x+1$ 。

用导数易证 $e^x \geq x+1$ ，当且仅当 $x=0$ 时取等号。

$\therefore e^{x-1} \geq x$ ，当且仅当 $x=1$ 时取等号。

$$\text{设计方案：(2) } e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1 \Leftrightarrow e^x \ln x + \frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow e^x \left(\ln x + \frac{1}{ex} \right) + \frac{1}{x} (e^{x-1} - x) > 0 \quad (\text{方案三})$$

$$\text{执行方案三：分析：} e^x \cdot \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1 \text{ 等价于 } e^x \cdot \ln x + \frac{2e^x}{ex} - 1 > 0.$$

$$\text{等价于 } e^x \left(\ln x + \frac{1}{ex} \right) + \frac{1}{x} (e^{x-1} - x) > 0.$$

$\therefore g(x) + h(x) > 0$ 即可。

$$g(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{ex} \right), \quad h(x) = \frac{1}{x} (e^{x-1} - x).$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \ln x + \frac{1}{ex}, \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{ex^2} = \frac{ex-1}{ex^2}.$$

知 $\varphi(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增；

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi\left(\frac{1}{e}\right) = 0.$$

$\therefore \varphi(x) \geq 0$ ，即 $g(x) \geq 0$ ，当且仅当 $x = \frac{1}{e}$ 时取等号。

$$\text{令 } \rho(x) = e^{x-1} - x, \quad \rho'(x) = e^{x-1} - 1.$$

$$\text{知 } \rho(x)_{\min} = \rho(1) = 0.$$

$\therefore \rho(x) \geq 0$ ，即 $h(x) \geq 0$ ，当且仅当 $x=1$ 时取等号。

综上所述，当 $x > 0$ 时， $e^x \left(\ln x + \frac{1}{ex} \right) + \frac{1}{x} (e^{x-1} - x) > 0$ ，即 $f(x) > 1$

分析: $e^{x-1} \geq x$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号,

$\therefore e^x \geq ex$, 当且仅当 $x=1$ 时取等号.

$\therefore e^{-\ln x} \geq e(-\ln x)$, 当且仅当 $-\ln x=1$ 时取等号, 即当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时取等号.

$\therefore e^{\ln x^{-1}} \geq (-e) \cdot \ln x$.

$\therefore \ln x \geq \frac{e^{\ln x^{-1}}}{-e} = -\frac{1}{ex}$. 即 $\ln x + \frac{1}{ex} \geq 0$, 当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时取等号.

设计方案: (3) $e^x \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1 \Leftrightarrow e^x (\ln x + \frac{2}{ex}) > 1$.

执行方案四: 欲证 $e^x \cdot \ln x + \frac{2e^x}{ex} > 1$, 只需证 $e^x (\ln x + \frac{2}{ex}) > 1$ 即可.

由前面分析, 可得 $\ln x + \frac{1}{ex} \geq 0$, 当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 取等号.

又 $\because e^x \geq ex \cdots \textcircled{1}$ 当且仅当 $x=1$ 取等号.

$\therefore \ln x + \frac{2}{ex} \geq \frac{1}{ex} \cdots \textcircled{2}$

$\therefore$ 由①和②可得: $e^x (\ln x + \frac{2}{ex}) > 1$,

这里关键是等号不能同时成立.

$\therefore f(x) > 1$.

回顾: $e^x \geq x+1$

$$e^{x-1} \geq x$$

$$e^x \geq ex$$

$$e^{-\ln x} \geq e(-\ln x)$$

公式关系清晰, 一气呵成!

反思 (挖掘本质): 泰勒展开式及其变形.

$$\because e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

这个式子也叫麦克劳林公式.

当 $0 < x < 1$ 时,

$$\text{有 } 1+x < e^x < 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = \frac{1}{1-x} \quad ①$$

$$\text{即 } \ln(1+x) < x < \ln \frac{1}{1-x} = -\ln(1-x) \quad ②$$

$\because x < -\ln(1-x)$, 其中 x 用 $\frac{x}{1+x}$ 替换.

$$\therefore \frac{x}{1+x} < -\ln\left(1-\frac{x}{1+x}\right) = \ln(1+x) \quad ③$$

$$\text{由②③得: } \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, (0 < x < 1) \quad ④$$

还有, $e^x \geq x+1, (x \in R)$ ⑤ 注意等号成立条件.

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}, (x < 1) \quad ⑥$$

$$\text{加强④可得 } \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, (x > -1) \quad ⑦$$

$$\text{还有: } \ln x < x < e^x, (x > 0) \quad ⑧$$

$$\ln x \leq x-1, (\text{当且仅当 } x=1 \text{ 取等号}) \quad ⑨$$

$$e^{x-1} \geq x, \quad e^x \geq ex, \quad \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e},$$

$$\ln x \geq -\frac{1}{ex}, \quad x \cdot \ln x \geq -\frac{1}{e} \text{ 等等.}$$

了解了以上知识, 我们不妨一起再来看看这个题:
执行方案五:

$$\frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}, \text{ 当且仅当 } x=1 \text{ 取等号.}$$

$$x \cdot \ln x \geq -\frac{1}{e}, \text{ 当且仅当 } x = \frac{1}{e} \text{ 取等号.}$$

$$x \cdot \ln x + \frac{1}{e} > \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e}.$$

$$x \cdot e^x \cdot \ln x + \frac{e^x}{e} > x - \frac{e^x}{e}.$$

$$e^x \cdot \ln x + \frac{2e^x}{ex} > 1.$$

$$\text{即 } e^x \cdot \ln x + \frac{2e^{x-1}}{x} > 1 \text{ 成立.}$$

是否很帅？

总结：常规方法遇阻碍，分而治之显神奇——泰勒公式藏天机！

最后，关注以下函数，课下练习巩固.

$$1. f(x) = x + e^x, \quad f(x) = x - e^x$$

$$f(x) = x \cdot e^x, \quad f(x) = \frac{x}{e^x}, \quad f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$2. f(x) = x + \ln x, \quad f(x) = x - \ln x, \quad f(x) = x \cdot \ln x,$$

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$3. f(x) = x^n \cdot e^x, \quad f(x) = \frac{x^n}{e^x}, \quad f(x) = \frac{e^x}{x^n}$$

$$4. f(x) = x^n \cdot \ln x, \quad f(x) = \frac{x^n}{\ln x}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$