《创新压轴题-研究特例》拓展提升测试答案

（2016 西城高三期末）在数字$1,2,\cdots,n\ (n\geqslant 2)$的任意一个排列 A：a_1，a_2，$\cdots$，a_n中，如果对于$i,j\in\mathbf{N}^*$，$i<j$，有$a_i>a_j$，那么就称(a_i,a_j)为一个逆序对. 记排列 A 中逆序对的个数为$S(A)$.

如$n=4$时，在排列 B：3, 2, 4, 1 中，逆序对有$(3,2)$，$(3,1)$，$(2,1)$，$(4,1)$，则$S(B)=4$.

（Ⅰ）设排列 C：3, 5, 6, 4, 1, 2，写出$S(C)$的值；

（Ⅱ）对于数字 1，2，$\cdots$，n 的一切排列 A，求所有$S(A)$的算术平均值；

（Ⅲ）如果把排列 A：a_1，a_2，$\cdots$，a_n中两个数字$a_i,a_j(i<j)$交换位置，而其余数字的位置保持不变，那么就得到一个新的排列A'：b_1，b_2，$\cdots$，b_n，求证：$S(A)+S(A')$为奇数.

（Ⅰ）**解**：$S(C)=10$； ………………2 分

（Ⅱ）**解**：考察排列D：d_1，d_2，$\cdots$，d_{n-1}，d_n与排列D_1：d_n，d_{n-1}，$\cdots$，d_2，d_1，

因为数对(d_i,d_j)与(d_j,d_i)中必有一个为逆序对（其中$1\leqslant i<j\leqslant n$），

且排列 D 中数对(d_i,d_j)共有$\mathrm{C}_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$个， ………………3 分

所以$S(D)+S(D_1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$. ………………5 分

所以排列D与D_1的逆序对的个数的算术平均值为$\dfrac{n(n-1)}{4}$. ………………6 分

而对于数字 1，2，$\cdots$，n 的任意一个排列 A：a_1，a_2，$\cdots$，a_n，都可以构造排列 A_1：a_n，a_{n-1}，$\cdots$，a_2，a_1，且这两个排列的逆序对的个数的算术平均值为$\dfrac{n(n-1)}{4}$.

所以所有$S(A)$的算术平均值为$\dfrac{n(n-1)}{4}$. ………………7 分

（Ⅲ）**证明**：①当 $j=i+1$，即a_i,a_j相邻时，

不妨设$a_i<a_{i+1}$，则排列A'为a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，a_{i+1}，a_i，a_{i+2}，$\cdots$，a_n，

此时排列A'与排列 A：a_1，a_2，$\cdots$，a_n相比，仅多了一个逆序对(a_{i+1},a_i)，

所以$S(A')=S(A)+1$，

所以$S(A)+S(A')=2S(A)+1$为奇数. ………………10 分

②当 $j\neq i+1$，即a_i,a_j不相邻时，

假设a_i,a_j之间有 m 个数字，记排列 A：a_1，a_2，$\cdots$，a_i，k_1，k_2，$,\cdots k_m$，a_j，$\cdots$，a_n，

先将 a_i 向右移动一个位置，得到排列 A_1：a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，k_1，a_i，k_2，，$\cdots$，k_m，a_j，$\cdots$，a_n，

由①，知 $S(A_1)$ 与 $S(A)$ 的奇偶性不同，

再将 a_i 向右移动一个位置，得到排列 A_2：a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，k_1，k_2，a_i，k_3，$\cdots$，k_m，a_j，$\cdots$，a_n，

由①，知 $S(A_2)$ 与 $S(A_1)$ 的奇偶性不同，

以此类推，a_i 共向右移动 m 次，得到排列 A_m：a_1，a_2，$\cdots$，k_1，k_2，$\cdots$，k_m，a_i，a_j，$\cdots$，a_n，

再将 a_j 向左移动一个位置，得到排列 A_{m+1}：a_1，a_2，$\cdots$，a_{i-1}，k_1，$\cdots$，k_m，a_j，a_i，$\cdots$，a_n，

以此类推，a_j 共向左移动 $m+1$ 次，得到排列 A_{2m+1}：a_1，a_2，$\cdots$，a_j，k_1，$\cdots$，k_m，a_i，$\cdots$，a_n，即为排列 A'，

由①，可知仅有相邻两数的位置发生变化时，排列的逆序对个数的奇偶性发生变化，

而排列 A 经过 $2m+1$ 次的前后两数交换位置，可以得到排列 A'，

所以排列 A 与排列 A' 的逆序数的奇偶性不同，

所以 $S(A)+S(A')$ 为奇数.

综上，得 $S(A)+S(A')$ 为奇数. ………………13 分