

《创新压轴题-研究特例》拓展提升测试

(2016 西城高三期末) 在数字 $1, 2, \dots, n$ ($n \geq 2$) 的任意一个排列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 中, 如果对于 $i, j \in \mathbf{N}^*$, $i < j$, 有 $a_i > a_j$, 那么就称 (a_i, a_j) 为一个逆序对. 记排列 A 中逆序对的个数为 $S(A)$.

如 $n=4$ 时, 在排列 $B: 3, 2, 4, 1$ 中, 逆序对有 $(3, 2)$, $(3, 1)$, $(2, 1)$, $(4, 1)$, 则 $S(B) = 4$.

(I) 设排列 $C: 3, 5, 6, 4, 1, 2$, 写出 $S(C)$ 的值;

(II) 对于数字 $1, 2, \dots, n$ 的一切排列 A , 求所有 $S(A)$ 的算术平均值;

(III) 如果把排列 $A: a_1, a_2, \dots, a_n$ 中两个数字 a_i, a_j ($i < j$) 交换位置, 而其余数字的位置保持不变, 那么就得到一个新的排列 $A': b_1, b_2, \dots, b_n$, 求证: $S(A) + S(A')$ 为奇数.