【课后作业】

（2012 东城一模理）若对于正整数k，$g(k)$表示k的最大奇数因数，例如$g(3)=3$，$g(10)=5$．设$S_n=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(2^n)$．

（Ⅰ）求$g(6),g(20)$的值；

（Ⅱ）求S_1，S_2，S_3的值；

（Ⅲ）求数列$\{S_n\}$的通项公式.

解：（Ⅰ）$g(6)=3$，$g(20)=5$． …………2 分

（Ⅱ）$S_1=g(1)+g(2)=1+1=2$；

$S_2=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)=1+1+3+1=6$；

$S_3=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)+g(6)+g(7)+g(8)=1+1+3+1+5+3+7+1=22$．

…………6 分

(Ⅲ)由（Ⅰ）（Ⅱ）不难发现对$m\in\mathbf{N}^*$， 有$g(2m)=g(m)$． …………8 分

所以当$n\geq 2$时，$S_n=g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+\cdots+g(2^n-1)+g(2^n)$

$$=[g(1)+g(3)+g(5)+\cdots+g(2^n-1)]+[g(2)+g(4)+\cdots+g(2^n)]$$

$$=[1+3+5+\cdots+(2^n-1)]+[g(2\times1)+g(2\times2)+\cdots+g(2\times2^{n-1})]$$

$$=\frac{(1+2^n-1)\times2^{n-1}}{2}+[g(1)+g(2)+\cdots+g(2^{n-1})]$$

$$=4^{n-1}+S_{n-1}$$ …………11 分

于是$S_n-S_{n-1}=4^{n-1}$，$n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*$．

所以$S_n=(S_n-S_{n-1})+(S_{n-1}-S_{n-2})+\cdots+(S_2-S_1)+S_1$

$$=4^{n-1}+4^{n-2}+\cdots+4^2+4+2$$

$$=\frac{4(1-4^{n-1})}{1-4}+2=\frac{4^n}{3}+\frac{2}{3}$$，$n\geq 2,n\in\mathbf{N}^*$． …………13 分

又$S_1=2$，满足上式，

所以对$n\in\mathbf{N}^*$，$S_n=\frac{1}{3}(4^n+2)$． …………14 分