《创新压轴大题——研究特例》学习指南

北京市陈经纶中学　　龚浩生

【学习目标】

1、体会从具体到抽象、从特殊到一般的研究问题的思想方法；

2、理解问题的特例，学会选取特例，学会从特例中研究规律寻找方法；

3、学会归纳类比，大胆猜想，小心求证。

【典型例题】

【例题】给定正奇数 $n(n\geq 5)$，数列 $\{a_n\}:a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，定义 $E(a_1,a_2,\cdots,a_n)=|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$ 为数列 $\{a_n\}$ 的位差和。

（1）当 $n=5$ 时，求数列 $\{a_n\}:1,3,4,2,5$ 的位差和；

（2）若数列 $\{a_n\}$ 的位差和 $E(a_1,a_2,\cdots,a_n)=4$，求满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数；

（3）若数列 $\{a_n\}$ 的位差和 $E(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\dfrac{1}{2}(n^2-1)$，求满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数。

[试题分析]

（1）直接按义列式计算；

（2）分类计算，位差和为 4 的数列只能分为三种类型：1+1+1+1，2+2，1+1+2。对这三种类型的排列分别计数，再求和；

（3）考虑这个位差和的本质：对应着怎样的数列？先对最简单的特例（$n=5$ 的情况）进行研究，把握本质再到一般。

[解题过程]

（1）4；（略）

（2）位差和为 $E(a_1,a_2,\cdots,a_n)=4$，只有如下三种类型：

“1+1+1+1 型”，选取两对相邻项交换序号，即 $a_i=i+1,a_{i+1}=i$，$a_j=j+1,a_{j+1}=j$，这四项不重复，其余项为 $a_k=k$，这样的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有 C_{n-2}^2 个；

“2+2 型”，选取相隔一项的两项交换序号，即 $a_i=i+2,a_{i+2}=i$，其余项为 $a_k=k$，这样的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有 $n-2$ 个；

“1+1+2 型”，选取三个相邻的项为 $a_i=i+1,a_{i+1}=i+2,a_{i+2}=i$，或 $a_i=i+2,a_{i+1}=i,a_{i+2}=i+1$，其余项为 $a_k=k$，这样的数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有 $2(n-2)$ 个。

共有：$C_{n-2}^2+3(n-2)=\dfrac{1}{2}(n-2)(n+3)$ 个。

（3）先研究 $n=5$ 的特例，此时 $E=\dfrac{1}{2}(n^2-1)=12$，

观察以下数列：

n: $1,2,3,4,5$

$a_n: 5,4,3,2,1$

有：$E=(5-1)+(4-2)+(3-3)+(4-2)+(5-1)=12$，

即 $E=2(5+4)-2(2+1)=12$，易知这是 $n=5$ 时的最大位差和。

即求位差和最大的数列个数：第一步，先把 3 任意排，有 5 种排法；第二步，对剩余的四位，前两位排 4、5，后两位排 1、2，有 $A_2^2\cdot A_2^2$ 种排法。所以，共有 $5A_2^2\cdot A_2^2=20$ 种。

由上述特例不难推广到一般：

对 $n=2k-1(k\geq 3)$，有 $E(a_1,a_2,\cdots,a_n)=|a_1-1|+|a_2-2|+\cdots+|a_n-n|$

$\leq 2[(2k-1)+(2k-2)+\cdots+(k+1)-(k-1)-(k-2)-\cdots-2-1]=2k(k-1)=\frac{1}{2}(n^2-1)$

于是，要使上式等号成立，需要且只需要保证 $1,2,\cdots,k$ 在后 k 个位置或 $k,k+1,k+2,\cdots,2k-1$ 在前 k 个位置即可．为了达到这个目的，可以先将 k 安排在任意一个位置，然后将剩下的位置中的前一半位置安排 $k+1,k+2,\cdots,2k-1$，后一半位置安排 $1,2,\cdots,k-1$ 就可以了．

所以，满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为 $(2k-1)\cdot(k-1)!\cdot(k-1)!=n[(\frac{n-1}{2})!]^2$。

【小结提升】

1、第（2）问分类计数是化繁为简的重要一步，那么怎样想到这种分类呢？这应由 4=1+1+1+1=1+1+2=1+3=2+2 发现最多分 4 类，通过实验“1+3 型”得不到；对三种类型分别计数时要把每一类型的排列方法理解透。

2、对于第（3）问，通过特例发现所给位差和是最大位差和，从而问题的本质就是求位差和最大的排列个数，这是一个关键；然后再通过特例发现位差和最大时，其表达式的变形转化，为找到排列方法给予了重要启发。

3、“研究特例”，就是考察所面对问题的某个或某些特殊情形，由此发现规律找到解决一般问题的途径。

一般来说，解决“特例”并不难，难的是如何将“特例”的处理方式迁移到一般问题中去。因此，对特例的处理，不仅仅是给出一个解答，而是研究其更一般的本质。

【学法建议】

研究特例体现了从特殊到一般、从具体到抽象的思想方法，它不仅是解决创新压轴题的重要方法，也是解决很多数学较难问题的有效方法，值得我们加深体会，加强理解和运用。

在具体运用中，进一步体验什么是特例？怎样选取特例？怎样研究特例？进一步积累经验。