

课题：函数小题综合问题

【学习目标】

- 1.通过函数小题综合问题的学习，加深对函数有关知识、方法以及数形结合、化归转化、函数方程等数学思想的理解，提升分析问题解决问题的能力；
- 2.通过专项学习以及扩展提升训练，促进数学抽象、逻辑推理、数学运算等数学学科核心素养的提升.

【学法指导】

- 重点：1.认真听例题 1，体会函数图象的对称性，并注意挖掘重要信息；认真听例题 2，体会赋值法解决抽象函数求值问题，并注意挖掘函数周期性；认真听例题 3，体会函数图象对称性的抽象表达；认真听例题 4，体会函数方程思想的运用，并注意挖掘重要信息.
- 2.通过学习 4 道例题，总结提炼函数的重要性质（最值、周期性、对称性、零点等），完成课后作业，有选择地完成扩展提升训练.

【学习任务】

1. 若函数 $f(x) = (1-x^2)(x^2+ax+b)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，则 $f(x)$ 的最大值为_____.

分析：解决此题分两步，第一步要根据已知条件求出 a, b 的值，第二步求 $f(x)$ 的最大值.

$f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，则 $f(-2-x) = f(-2+x)$ 恒成立，即 $f(x) = f(-4-x)$ 恒成立. 观察已知函数发现， ± 1 是函数 $f(x)$ 的两个零点，这样 -3 ， -5 也必为函数的零点，从而 -3 ， -5 为 $x^2+ax+b=0$ 的两根.

接下来，求 a, b 有两种方法：

方法一、代入方程解方程组
$$\begin{cases} (-3)^2 - 3a + b = 0, \\ (-5)^2 - 5a + b = 0. \end{cases}$$

方法二、由韦达定理
$$\begin{cases} (-3) + (-5) = -a, \\ (-3) \cdot (-5) = b. \end{cases}$$

也可不用求 a, b ，由 -3 ， -5 为 $x^2+ax+b=0$ 的两根，则 $x^2+ax+b = (x+3)(x+5)$

$$\text{这样， } f(x) = (1-x^2)(x+3)(x+5)$$

$$= -(x-1)(x+1)(x+3)(x+5)$$

$$= -(x-1)(x+5) \cdot (x+1)(x+3)$$

$$= -(x^2+4x-5)(x^2+4x+3)$$

$$\text{令 } t = x^2+4x, \quad t = (x+2)^2-4 \geq -4,$$

$$\text{则 } g(t) = -(t-5)(t+3) = -(t-1)^2+16 \quad (t \geq -4).$$

当 $t=1$ 时, $g(t)$ 的最大值是 16, 从而 $f(x)$ 的最大值为 16.

2. 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(1)=\frac{1}{4}$, $4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $f(2019)f(2020)=$ _____.

分析: 本题属于函数方程类问题, 多采用赋值法.

需根据等式 $4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ 对任意 $x, y \in \mathbf{R}$ 恒成立, 对 x, y 取特殊的数值或表达式来解决.

解法一、通过计算 $f(2), f(3), f(4), \dots$, 找规律, 发现周期性.

解法二、首先根据已知 $f(1)=\frac{1}{4}$, 先取 $y=1$, 则由已知等式可得, $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$

这样, 将 x 换成 $x+1$, 得 $f(x+1)=f(x+2)+f(x)$, 根据两式, 则有 $f(x+2)=-f(x-1)$,

即 $f(x+3)=-f(x)$, 将 x 换成 $x+3$, 得 $f(x+6)=-f(x+3)$, 所以 $f(x+6)=f(x)$. 这

样 $f(x)$ 的周期为 6.

所以 $f(2019)=f(3)=-f(0)$, 需求出 $f(0)$.

在 $4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)$ 中,

取 $x=1, y=0$, 则 $4f(1)f(0)=f(1)+f(1)$, 而 $f(1)=\frac{1}{4}$, 所以 $f(0)=\frac{1}{2}$.

这样 $f(2019)=-\frac{1}{2}$,

又 $f(2020)=f(4)=-f(1)=-\frac{1}{4}$,

所以 $f(2019)+f(2020)=-\frac{3}{4}$.

3. 已知函数 $f(x)(x \in \mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$, 若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点

为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m)$, 则 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) =$ ()

(A) 0 (B) m (C) $2m$ (D) $4m$

分析: 由 $f(-x)=2-f(x)$ 得 $f(x)$ 关于 $(0, 1)$ 对称, 而 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ 也关于 $(0, 1)$ 对称,

解法一. 特值法.

取符合条件的一个特殊函数 $f(x)=x+1$, 易知函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 和 $y=x+1$ 有两个交点

$(-1, 0), (1, 2)$, 则 $m = 2$, $\sum_{i=1}^2 (x_i + y_i) = 2$, 故选 B.

解法二.

由对称性, 两函数图象的 m 个交点, 可以分成 $\frac{m}{2}$ 组关于点 $(0, 1)$ 对称的点. 而对于每一组对称

点 $(x_i, y_i), (x'_i, y'_i)$, 则 $x_i + x'_i = 0, y_i + y'_i = 2$, $y_i + y'_i = 2$,

所以 $\sum_{i=1}^m (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{i=1}^m y_i = 0 + 2 \cdot \frac{m}{2} = m$, 故选 B.

4. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ 有唯一零点, 则 $a =$

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

分析: 已知条件等价于方程 $a(e^{x-1} + e^{-x+1}) = -x^2 + 2x$ 有唯一解.

解法辨析 (摘自网上):

设 $h(x) = -x^2 + 2x$, $g(x) = e^{x-1} + e^{-x+1}$, 则函数 $h(x)$ 与 $ag(x)$ 的图象有唯一交点,

又 $g(x) = e^{x-1} + e^{-x+1} = e^{x-1} + \frac{1}{e^{x-1}} \geq 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时取得最小值 2.

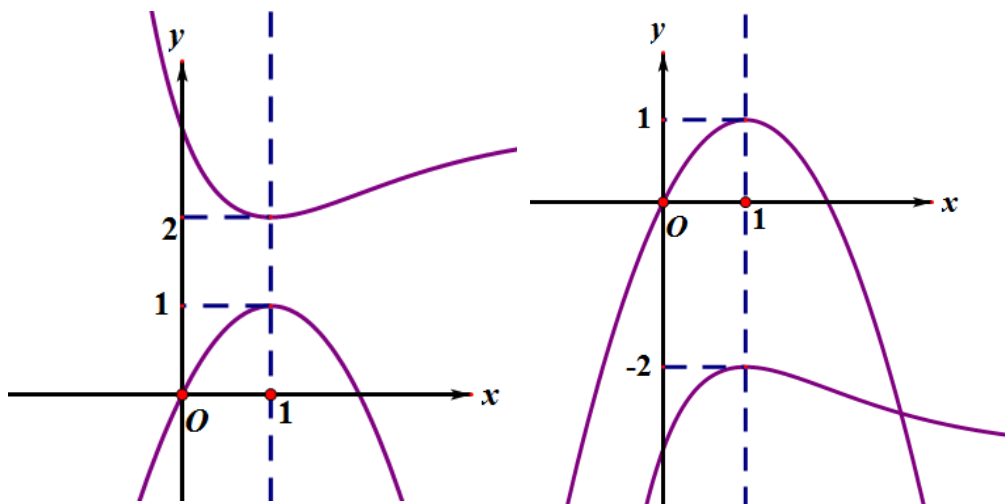
而 $h(x) = -(x-1)^2 + 1 \leq 1$, 此时 $x = 1$ 时取得最大值 1,

$ag(x) = h(x)$ 有唯一的交点, 则 $a = \frac{1}{2}$. 故选 C.

点评: 虽然答案正确. 但推理存在问题. 当 $a > 0$ 时, 上述解法没有问题, 但当 $a < 0$ 时, 仅通过最值则无法说明是否有唯一交点.

反例: 取 $g(x) = 3 - \frac{e^x}{e^x} \geq 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时取得最小值 2.

若 $ag(x) = h(x)$ 有唯一的交点, 则不一定有 $a = \frac{1}{2}$, 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 仍有唯一交点.



正解：设 $h(x) = -x^2 + 2x$ ， $g(x) = a(e^{x-1} + e^{-x+1})$ ，则易知两函数图象均关于 $x=1$ 对称，若两函数图象有唯一交点，则必有 $h(1) = g(1)$ 。否则，公共点的个数一定是偶数个。

由 $h(1) = g(1)$ ，得 $a = \frac{1}{2}$ 。

显然 $a = \frac{1}{2}$ 满足条件。