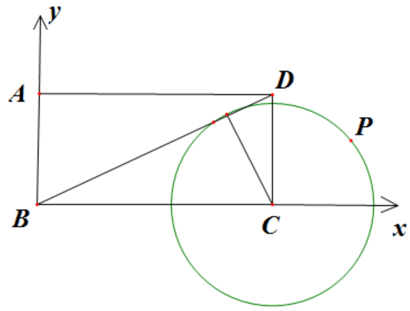
课后作业答案

1．A． 【解】如图所示，建立平面直角坐标系



设 $A(0,1),B(0,0),C(2,0),D(2,1),P(x,y)$ ，

根据等面积公式可得圆的半径 $r=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，即圆 C 的方程是

$(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ ，

$\overrightarrow{AP}=(x,y-1)$，$\overrightarrow{AB}=(0,-1)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0)$

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$ 即 $\begin{cases}x=2\mu\\y-1=-\lambda\end{cases}$，

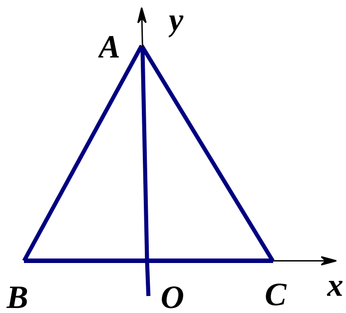
故 $\begin{cases}\mu=\dfrac{x}{2}\\\lambda=1-y\end{cases}$，所以 $\lambda+\mu=\dfrac{x}{2}-y+1$，设 $z=\dfrac{x}{2}-y+1$

由圆心 $(2,0)$ 到直线 $z=\dfrac{x}{2}-y+1$ 的距离 $d\le r$，即

$\dfrac{|2-z|}{\sqrt{\dfrac{1}{4}+1}}\le\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，得 $1\le z\le 3$，z 的最大值为 3，$\lambda+\mu$ 的最大值为 3．选 A．

2.B. 【解】

建立如图直角坐标系



则 $A(0,\sqrt{3})$，$B(-1,0)$，$C(1,0)$

设 $P(x,y)$

$\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，$\overrightarrow{PB}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(1-x,-y)$

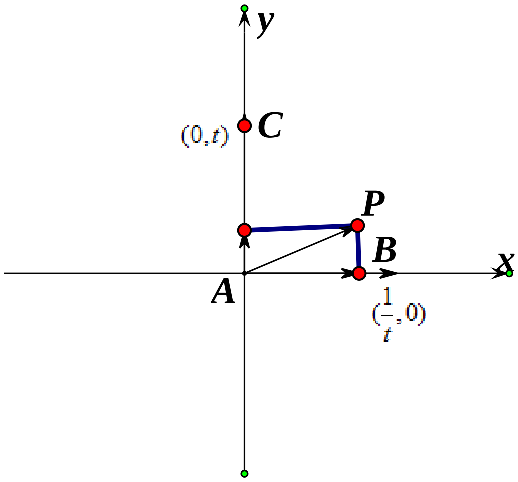
故 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=(-2x,-2y)$

$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2-2y(\sqrt{3}-y)=2x^2+2(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2-\dfrac{3}{2}\ge-\dfrac{3}{2}$

当 $P(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ 时，所求最小值为 $-\dfrac{3}{2}$，故选 **B.**

3. 13【解】

建立如图直角坐标系，则 $A(0,0)$， $B(\frac{1}{t},0)$， $C(0,t)$



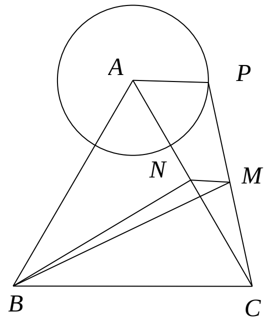
$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{4\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=(1,4)$

$\overrightarrow{PB}=(\frac{1}{t}-1,-4)$， $\overrightarrow{PC}=(-1,t-4)$

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=17-(4t+\frac{1}{t})\le 17-2\sqrt{4t\times\frac{1}{t}}=13$

当且仅当 $t=\frac{1}{2}$ 取等号，此时 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于 13.

4. **B.** 【解】在平面内，定点 A， B， C， D 满足



$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|$,可得 D 为 $\triangle ABC$ 的外心，

由 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}$，可得 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心，

可知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，

再由 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=-2$ 可得正 $\triangle ABC$ 的边长为 $2\sqrt{3}$，

由 $|\overrightarrow{AP}|=1$，知点 P 在以 A 为圆心，1 为半径的圆上，

由 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MC}$ 知 M 为 PC 中点，取 AC 的中点 N， 易知 $|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}$，

所以点 M 在以点 N 为圆心， $\frac{1}{2}$ 为半径的圆上，

又 $|BM|\le|BN|+|MN|=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

当且仅当 M， N， B 三点共线时取得等号．故 $\overrightarrow{BM}^2=\frac{49}{4}$，选 B.

5. 【解】$[2,5]$

设 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\lambda \quad \lambda\in[0,1]$

则 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CN}=\lambda\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AB}$

$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD})[(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}]$

$=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+(1+\lambda-\lambda^2)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AD}^2$

$=4(1-\lambda)+(1+\lambda-\lambda^2)\times 2\times 1\times\dfrac{1}{2}+\lambda$

$=-\lambda^2-2\lambda+5$

$=-(\lambda+1)^2+6$

$\lambda=0$ 时， $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 取最大值 5

$\lambda=1$ 时， $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 取最小值 2

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$ 的取值范围是 $[2,5]$.