压轴小题专题——平面向量中的最值问题

【学习目标】

1. 能合理建立直角坐标系，将数量积的最值问题转化为代数最值问题，并能掌握这一通法.

2. 能具有运动变化思想，能从投影、轨迹角度等找到问题的几何背景,挖掘数学问题的几何解释，形成和发展自己的直观想象的数学素养.

3. 能将所求数量积最值问题转化为已知模和夹角的向量的数量积最值问题.

4. 能联想并应用数量积的性质（$|\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}\cdot\vec{b}|$）解决最值问题.

5. 会根据题目的不同情境，采取不同的方法，并能快速找到最简洁的方法利用转化法、几何法、坐标法、放缩法求解向量中的最值问题根据题目不同情境选择不同方法.

【预备知识】

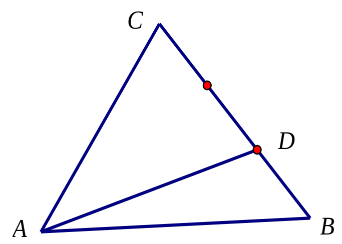
1. 平面向量的有关加法、减法、数乘的概念与运算，平面向量基本定理.

2. 数量积定义及其数量积的几何意义及投影的概念.

3. 平行、垂直、数量积的坐标表示.

4. 柯西不等式：$|\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}\cdot\vec{b}|$.

【典型例题】



例题 1. 在正三角形 ABC 中，$AB=3$，D 是 BC 上一点, 且 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_______ .

1.结论如何转化

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ 很难直接用数量积公式直接求得，那该怎办？

（1）可以转化为其他向量的数量积.

（2）联想数量积几何意义，即投影的概念.

（3）可以建立平面直角坐标系，转化为坐标运算.

2.多种解法

方法一：

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})$$

$$=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=9+\frac{1}{3}\times3\times3\times\cos120^\circ=\frac{15}{2}.$$

方法二：过 D 点作 $DM\perp AB$ 于 M，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|AM||AB|=\frac{5}{2}\times 3=\frac{15}{2}$.

方法三：以 A 为坐标原点，以 AB 为 x 轴建立直角坐标系，

$B(3,0)$，$C(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2})$，$D(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{AB}=(3,0)$，$\overrightarrow{AD}=(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{15}{2}$.

3. 数量积的求法及每种方法的适用条件

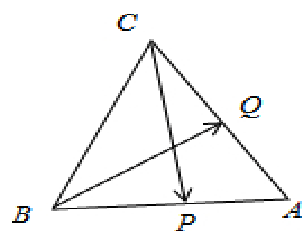
①定义法：数量积定义，适用条件是已知向量的模与夹角**.**

②转化法：适用条件是所求数量积中的向量可以转化为已知模和夹角的向量中去**.**

③几何法（投影等）：适用条件是几何法易求得投影或找到几何意义**.**

④坐标法（通法）： 适用条件是方便建立平面直角坐标系，坐标易写**.**

变式训练：正三角形 ABC 的边长为1，点 P 是 AB 边上的动点，点 Q 是 AC 边上的动点,且 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC},\lambda\in\mathbf{R}$，则 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最大值为________



解法一：$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

$=[\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}]\cdot(\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\lambda\overrightarrow{AB}^2+(1-\lambda)\overrightarrow{AC}^2+\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=(\lambda-\lambda^2+1)\times\cos 60^\circ-\lambda+\lambda-1$

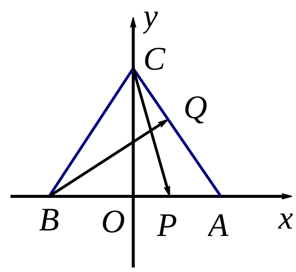
$=-\frac{1}{2}(\lambda-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{8},0\le\lambda\le 1$

所以当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}$ 的最大值为 $-\frac{3}{8}$

解法二：以 AB 为 x 轴，AB 边所在的高为 y 轴，建立平面直角坐标系

由 $AB=1$ 则 $A(\frac{1}{2},0),B(-\frac{1}{2},0)$ 设 $P(x,0)$ 由 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

$P(\frac{1}{2}-\lambda,0)$



设$Q(m,n)$由$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC},\lambda\in\mathbf{R}$得

$m=\dfrac{\lambda}{2},n=(1-\lambda)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

所以$Q(\dfrac{\lambda}{2},\dfrac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{2})$

所以$\overrightarrow{BQ}=(\dfrac{1+\lambda}{2},\dfrac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{2}),\overrightarrow{CP}=(\dfrac{1-2\lambda}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=\dfrac{-\lambda^2+\lambda-1}{2}=-\dfrac{1}{2}(\lambda-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{3}{8}$

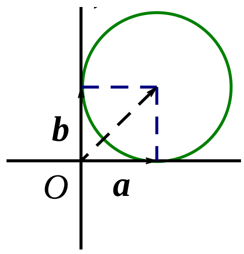
故$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，$(\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP})_{\max}=-\dfrac{3}{8}$.

例题 2 已知$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是单位向量，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 若向量$\boldsymbol{c}$满足$\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=1$，求$\left|\boldsymbol{c}\right|$的取值范围.

1.条件如何转化

设$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$，则$\left|\vec{c}-\vec{u}\right|=1$，即$\vec{c}$的终点在以$\vec{u}$对应点为圆心，半径为 1 的圆上，或者是建立平面直角坐标系，将$\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right|=1$坐标化.

2.多种解法



方法一：设$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$，则$\left|\vec{c}-\vec{u}\right|=1$，即$\vec{c}$的终点在以$\vec{u}$对应点为圆心，半径为1的圆上，

$\vec{c}$的起点为O，又圆心到O的距离为$\sqrt{2}$，则当$\vec{c}$与$\vec{u}$方向相同时，

$\left|\vec{c}\right|_{\max}=\sqrt{2}+1$,

当$\vec{c}$与$\vec{u}$方向相反时，$\left|\vec{c}\right|_{\min}=\sqrt{2}-1$,

所以$\sqrt{2}-1\le|\vec{c}|\le\sqrt{2}+1$.

方法二：

由$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$可得$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$

所以$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2}$

由$|\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})|=1$

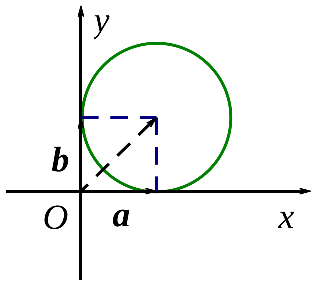
$\vec{c}^2-2(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})^2=1$

即$\vec{c}^2+1=2(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}\le 2|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{c}|=2\sqrt{2}|\vec{c}|$

$\vec{c}^2-2\sqrt{2}|\vec{c}|+1\le 0$

所以$\sqrt{2}-1\le|\vec{c}|\le\sqrt{2}+1$.

方法三：以以$\vec{a},\vec{b}$所在直线为x,y轴建立直角坐标系



设$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(0,1)$，$\vec{c}=(x,y)$

由$|\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})|=1$得

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

（分析：目标求$|\vec{c}|$的范围，而$|\vec{c}|=\sqrt{x^2+y^2}$

本题相当于求$\sqrt{x^2+y^2}$或x^2+y^2的范围，我们可能有怎样的方向？）

3.每种方法的运算难点及突破方法.

方法一的难点是挖掘出$\left|\vec{c}-\vec{u}\right|=1$的几何意义.

方法二的难点是需要利用$|\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}\cdot\vec{b}|$进行放缩.

方法三的难点是先代数后合理联想几何，体现的是数形结合.

例 3.（2016 年浙江高考）已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，若对任意单位向量$\boldsymbol{e}$，均有$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\le\sqrt{6}$，则$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$的最大值是________.

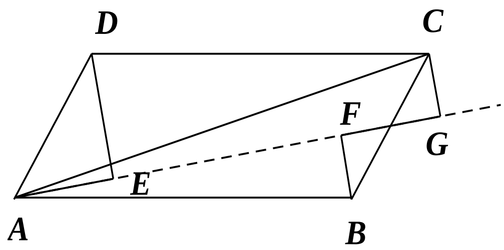
1.条件如何转化：

条件$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\le\sqrt{6}$如何转化，若引入坐标将十分复杂！那我们能联想什么？

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|$表示$\boldsymbol{a}$在单位向量$\boldsymbol{e}$上的投影，所以$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|$的几何意义是$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{e}$上的投影之和，这也许就是本题的关键.

2.多种解法

解：如图 3，设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|\le|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 当且仅当 $\boldsymbol{e}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线时取等号．依据题意 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\le\sqrt{6}$，即 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2\le 6$

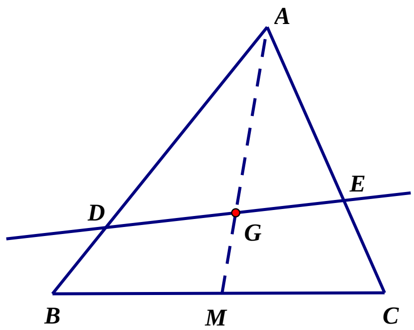


又 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$ 所以 $1+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\le 6$

即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\le\dfrac{1}{2}$，所以 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})_{\max}=\dfrac{1}{2}$

3.方法的难点及突破方法

题目很难进行坐标化，通法产生困惑！进一步回归到对几何背景的挖掘与研究上．$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}|+|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}|$ 的几何意义是 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 上的投影之和，这也是本题的关键．向量是一个有“形”的几何量，因此，在研究与向量有关的问题时，既要掌握通法——运用向量的运算来解决问题，又要善于根据题目的不同情境转化为图形中的相应位置关系．一定要结合图形进行分析、判断和求解，深刻感受向量本质的二重性．



例 4. （2015 清华自招）过 ΔABC 的重心作直线将 ΔABC 分成两部分，则这两部分的面积之比的（　　）

(A)最小值为 $\dfrac{3}{4}$　(B)最小值为 $\dfrac{4}{5}$

(C)最大值为 $\dfrac{4}{3}$　(D)最大值为 $\dfrac{5}{4}$

1.条件或结论如何转化：

重心的性质有哪些？$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$．

结论两部分的面积之比可以先考虑 $\dfrac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}$ 的值．

2.多种解法

解：设 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=1$

$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}=y\overrightarrow{AC}, x,y\in(0,1)$

$S_{\Delta ADE}=S=xy$

$\overrightarrow{AG}=(1-\lambda)\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{AE}=(1-\lambda)x\overrightarrow{AB}+\lambda y\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

所以$\begin{cases}(1-\lambda)x=\dfrac{1}{3}\\ \lambda y=\dfrac{1}{3}\end{cases}$消去$\lambda$得$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$

又$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{xy}}=2\sqrt{\dfrac{1}{S}}$，即$S\ge\dfrac{4}{9}$，当且仅当$x=y=\dfrac{2}{3}$取等号，

所以这两部分的面积之比的最小值为$\dfrac{4}{5}$，最大值为$\dfrac{5}{4}$.

3.方法的运算难点及突破方法

引入参数x,y，求$S=xy$的最值，就要找到x,y的等式关系，如何寻找是本题的难点.三点共线与重心性质的恰当应用，再结合平面向量基本定理就找到了关系式$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=3$，再利用均值不等式求解，这就是突破方法.

【小结提升】

利用转化法、几何法、坐标法、放缩法求解向量中的最值问题，其中坐标法是通法.

【本专题学法指导】

将求数量积中的方法迁移到求最值问题中来，并能用通法（坐标法）解决问题，体会转化法、投影法、几何法求最值的情境条件，对于一些较难问题，我们要具有运动变化思想，能从投影、轨迹角度等找到问题的几何背景，深刻感受向量的二重性（既有形又有数）.