

高二年级数学学科第四周

第五课时《不等式的恒成立、能成立》拓展题答案

【思考】已知函数 $f(x) = x^2$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - m$, 若 $\forall x_1 \in [-1, 3]$, $\exists x_2 \in [0, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 求实数 m 的取值范围.

【解析】

对于 $\forall x_1 \in [-1, 3]$, 有 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 恒成立,

只需 $\forall x_1 \in [-1, 3]$, 使得 $f(x_1)_{\min} \geq g(x_2)$.

因为 $\forall x_1 \in [-1, 3]$, $f(x_1) \in [0, 9]$, 即 $f(x)_{\min} = 0$,

若 $\exists x_2 \in [0, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$,

则只要满足 $g(x)_{\min} \leq 0$.

而函数 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上是单调减函数,

$$\text{故 } g(x)_{\min} = g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - m \leq 0,$$

$$\text{故 } m \geq \frac{1}{4}.$$