

高二年级数学学科第四周第五课时
《不等式的恒成立、能成立问题》作业答案

1. A

2. A

【解析】因为 $y = 2x^2 - 8x - 4 (1 \leq x \leq 4)$

在 $x = 4$ 时, 取最大值 -4 ,

所以当 $a \leq -4$ 时, $2x^2 - 8x - 4 \geq a$ 在 $x \in [1, 4]$ 内有解.

3. D

【解析】因为 $x > 0, y > 0$. 所以 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} \geq 8$ (当且仅当 $\frac{2y}{x} = \frac{8x}{y}$ 时取“=”).

若 $\frac{2y}{x} + \frac{8x}{y} > m^2 + 2m$ 恒成立, 则 $m^2 + 2m < 8$, 解之得 $-4 < m < 2$.

4. D

【解析】命题可化为 $\forall x \in [1, 2), a \geq x^2$ 恒成立.

因为 $x \in [1, 2)$, 所以 $x^2 \in [1, 4)$.

所以命题为真命题的充要条件为 $a \geq 4$.

所以命题为真命题的一个充分不必要条件为 $a > 4$.

5. A

【解析】由 $\Delta = a^2 + 8 > 0$ 知, 方程 $x^2 + ax - 2 = 0$ 恒有两个不等实根,

又知两根之积为负, 所以方程必有一正根、一负根.

于是不等式在区间 $[1, 5]$ 上有解的充要条件是 $f(5) > 0$,

即 $25 + 5a - 2 > 0$, 解得 $a > -\frac{23}{5}$,

所以 a 的取值范围为 $(-\frac{23}{5}, +\infty)$.

6. D

【解析】当 $k = 0$ 时, 显然成立; 当 $k \neq 0$ 时, 要满足题意,

则有 $\begin{cases} k < 0, \\ k^2 - 4 \times 2k \times (-\frac{3}{8}) < 0, \end{cases}$ 解得 $-3 < k < 0$.

综上, k 的取值范围是 $(-3, 0]$.

7. C

【解析】因为函数 $y = (x - 1)^2$ 在区间 $(1, 2)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (1, 2)$ 时, $y \in (0, 1)$.

若不等式 $(x - 1)^2 < \log_a x$ 恒成立,

则 $a > 1$ 且 $1 \leq \log_a x$, 即 $a \in (1, 2]$

8. B

【解析】因为不等式 $x + \frac{y}{4} < m^2 - 3m$ 有解，所以 $\left(x + \frac{y}{4}\right)_{\min} < m^2 - 3m$,

因为 $x > 0$, $y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$,

所以 $x + \frac{y}{4} = \left(x + \frac{y}{4}\right) \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}\right) = \frac{4x}{y} + \frac{y}{4x} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{4x}{y} \cdot \frac{y}{4x}} + 2 = 4$,

当且仅当 $\frac{4x}{y} = \frac{y}{4x}$, 即 $x = 2$, $y = 8$ 时取等号,

所以 $\left(x + \frac{y}{4}\right)_{\min} = 4$, 故 $m^2 - 3m > 4$, 解得 $m < -1$ 或 $m > 4$.

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

9. C

10. C