

高二年级数学学科第四周第五课时学习指南

不等式的恒成立、能成立问题

学习目标

1. 分清不等式的恒成立、能成立问题中的字母谁为主元，谁是参数；
2. 根据不等式的结构特征，利用函数的图象和性质解决恒成立、能成立问题；
3. 能运用函数方程思想和“分离变量法”将不等式问题转化为最值问题；
4. 提升分析问题、解决解题的能力，提高数学运算的素养.

学法指导

1. 解决不等式的恒成立、能成立问题的关键就是转化成求函数的最值问题，常用方法：
 - ① 直接利用含参的函数的图象和性质；
 - ② 利用分离参变量的方法，将不等式问题转化为不含参数函数的最值问题；
 - ③ 可以变换主元，构造新函数.
2. 运用参变分离得到不含参函数 $f(x)$ 后的处理策略
 - (1) 不等式的恒成立问题
 - ① 若 $f(x) \geq a$ 对 $x \in D$ 恒成立，只需 $f(x)_{\min} \geq a(x \in D)$ 即可；
 - ② 若 $f(x) \leq a$ 对 $x \in D$ 恒成立，只需 $f(x)_{\max} \leq a(x \in D)$ 即可.
 - (2) 不等式的能成立问题
 - ① 若 $f(x) \geq m$ 对 $x \in D$ 能成立，只需 $f(x)_{\max} \geq m(x \in D)$ 即可；
 - ② 若 $f(x) \leq m$ 对 $x \in D$ 能成立，只需 $f(x)_{\min} \leq m(x \in D)$ 即可.

学习任务单

一、不等式的恒成立问题

例 1 若不等式 $x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对于任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【变式一】若不等式 $x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对于 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

【变式二】若不等式 $x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对于 $a \in [1, 2]$ 恒成立，求 x 的取值范围.

二、不等式的能成立问题

例 2 若存在实数 $x \in [2, 4]$ ，使 $x^2 - 2x + 5 - m \leq 0$ 成立，求 m 的取值范围.

三、归纳小结