高二年级数学学科第四周第二课时《不等式性质》拓展题参考答案

问题：已知：$a,b\in N^{+}$，求证：$\sqrt{2}$在$\frac{b}{a}$与$\frac{2a+b}{a+b}$之间.

分析：也就是证明$\frac{b}{a}$与$\frac{2a+b}{a+b}$一个比$\sqrt{2}$大，一个比$\sqrt{2}$小，即$\sqrt{2}-\frac{b}{a}$与$\sqrt{2}-\frac{2a+b}{a+b}$异号.

证明： $(\frac{b}{a}-\sqrt{2})(\frac{2a+b}{a+b}-\sqrt{2})=\frac{b-\sqrt{2}a}{a}\cdot\frac{(2a+b)-\sqrt{2}(a+b)}{a+b}$

$=\frac{b-\sqrt{2}a}{a}\cdot\frac{(\sqrt{2}-1)(b-\sqrt{2}a)}{a+b}=\frac{-(\sqrt{2}-1)(b-\sqrt{2}a)^2}{a(a+b)}$

$\because a,b\in N^{+}$，$\therefore \sqrt{2}a\neq b.\ \therefore -(\sqrt{2}-1)(b-\sqrt{2}a)^2<0$，

故$\sqrt{2}$在$\frac{b}{a}$与$\frac{2a+b}{a+b}$之间.

思考：$\frac{b}{a}$与$\frac{2a+b}{a+b}$哪一个更接近$\sqrt{2}$？

解析：$\left|\frac{b}{a}-\sqrt{2}\right|=\frac{1}{\mathrm{a}}|\sqrt{2}a-b|$，

$\left|\frac{2a+b}{a+b}-\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}-1}{a+b}|\sqrt{2}a-b|$

$\because \frac{1}{a}>\frac{1}{a+b}>\frac{\sqrt{2}-1}{a+b}$，$\frac{1}{a}|\sqrt{2}a-b|>\frac{\sqrt{2}-1}{a+b}|\sqrt{2}a-b|$，

故$\frac{2a+b}{a+b}$更接近$\sqrt{2}$.