高二 数学学科 拓展资源 7 《集合新定义问题研究》学习指南

学习目标

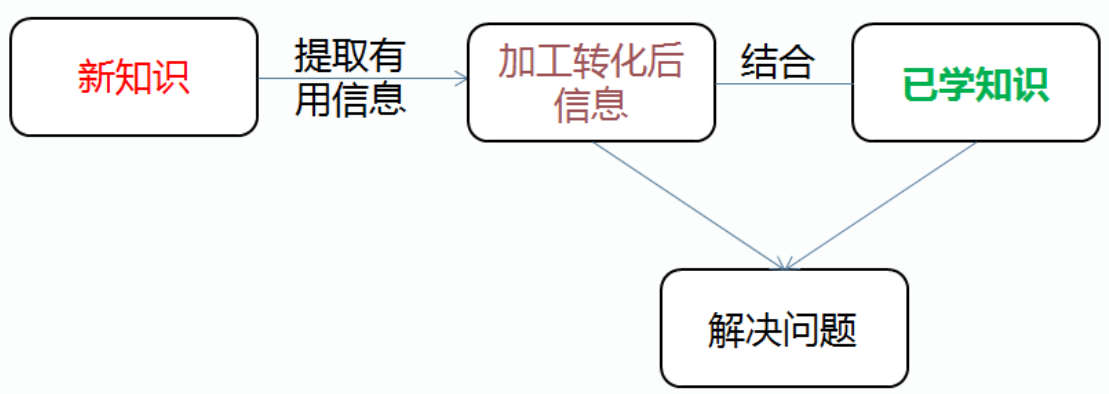
1.通过对习题的探究解决，理解集合中的新定义问题的解决的一般思路；

2.在解决问题中，落实抽象概括，推理论证及其数学运算等核心素养；

3.在整个学习过程中，培养了对知识迁移能力和转化能力，激发了进一步学习的潜能，从而强化了创新的思维品质.

学法指导

1.关于解决集合新定义问题，我们常常采用以下解题思路：



2.这类问题解决的重点是：对信息的提取和转化及化归；（关注例 1 和例 2 给的新信息的应用）

3.这类问题能很好的考查出我们对知识迁移能力和转化能力，从而检测出我们的理性思维的广度和深度，以及进一步学习的潜能，从而培养我们的创新思维。

学习任务单

例 1. 设 A 是整数集的一个非空子集，对于 $k\in A$，如果 $k-1\notin A$ 且 $k+1\notin A$，那么 k 是 A 的一个“孤立元”，给定 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则 A 的所有子集中，只有一个“孤立元”的集合共有（　　）

A. 10 个　　B. 11 个　　C. 12 个　　D. 13 个

解析：方法一：以“集合 A 的子集”中含有一个孤立元入手，进行分类处理

（1）集合 A 的子集中元素个数为 1 个

$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$

（2）集合 A 的子集中元素个数为 3 个

$\{1,3,4\}$，$\{1,4,5\}$，$\{2,4,5\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,2,5\}$，$\{2,3,5\}$

（3）集合 A 的子集中元素个数为 4 个

$\{1,3,4,5\}$，$\{1,2,3,5\}$

方法二：以“孤立元为谁”进行分类处理

（1）元素“1”为孤立元，$\{1\}$，$\{1,3,4\}$，$\{1,4,5\}$，$\{1,3,4,5\}$

（2）元素“2”为孤立元，$\{2\}$，$\{2,4,5\}$

（3）元素“3”为孤立元，$\{3\}$

（4）元素“4”为孤立元，$\{4\}$，$\{1,2,4\}$

（5）元素“5”为孤立元，$\{5\}$，$\{1,2,5\}$，$\{2,3,5\}$，$\{1,2,3,5\}$

小结：

1.本题只要抓住“孤立元”这个关键的新概念，结合集合的子集概念，利用分类讨论思想（并且根据分类标准的选择不同，采用了两种不同的方法），可以很快，很轻松的解决。

2.本题主要考查阅读与理解、信息迁移以及我们的学习潜力，考查我们的分析问题和解决问题的能力，实际上解题的关键还是 “孤立元” 的概念。

例 2. 对于集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，$n\in\mathrm{N}^*$，$m\in\mathrm{N}^*$，定义 $A+B=\{x+y|x\in A,\ y\in B\}$.集合 A 中的元素个数记为 $|A|$.规定：若集合 A 满足 $|A+A|=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则称集合具 A 有性质 T.

(1) 已知集合 $A=\{1,3,5,7\}$，$B=\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{3}\right\}$，写出 $|A+A|$，$|B+B|$ 的值；

(2) 已知集合 $A=\left\{\dfrac{2}{3},\left(\dfrac{2}{3}\right)^2,\left(\dfrac{2}{3}\right)^3,\cdots\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$，其中 $n\geq 3$，证明： A 有性质 T；

(3) 已知集合 A，B 有性质 T，且 $n=m$， 求 $|A+B|$ 的最小值.

解析：(1) 根据定义可得： $A+A=\{2,4,6,8,10,12,14\}$，

$B+B=\left\{\dfrac{2}{3},1,\dfrac{5}{3},3,\dfrac{4}{3},2,\dfrac{10}{3},\dfrac{8}{3},4,\dfrac{16}{3}\right\}$.

所以 $|A+A|=7$，$|B+B|=10$

(2) 数列 $\frac{2}{3},\left(\frac{2}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{3}\right)^3,\cdots\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 的通项公式为：$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

若存在 $n_1<n_2\leqslant n_3<n_4, a_{n_1}+a_{n_4}=a_{n_2}+a_{n_3}$ 成立，则 $(\frac{2}{3})^{n_1}+(\frac{2}{3})^{n_4}=(\frac{2}{3})^{n_2}+(\frac{2}{3})^{n_3}$, 因此有 $(\frac{2}{3})^{n_4-n_1}=(\frac{2}{3})^{n_2-n_1}+(\frac{2}{3})^{n_3-n_1}-1$, 即有 $2^{n_4-n_1}=2^{n_2-n_1}\times 3^{n_4-n_2}+2^{n_3-n_1}\times 3^{n_4-n_3}-3^{n_4-n_1}$.

等式的左边是 2 的倍数, 右边是 3 的倍数, 故等式不成立, 因此等比数列中的任意两项(包括本身与本身)的和不在这个数列中

所以 $|A+A|$ 中的元素的个数为：$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$, 即 $|A+A|=\frac{n(n+1)}{2}$, 所以 A 有性质 T；

(3) 集合 A 具有性质 T, 所以集合 A 中的任意两个元素的和都不在该集合中, 也就是集合 A 中的任意两个元素的和都不相等, 对于任意的 $a<b\leqslant c<d$ 有 $a+d\neq b+c\Leftrightarrow d-c\neq b-a$, 也就是任意两个元素的差的绝对值不相等.

设 $A^*=\{x-y\,|\,x\in A, y\in A, x>y\}$,所以

集合 A 具有性质 T $\Leftrightarrow |A+A|=\frac{n(n+1)}{2}\Leftrightarrow |A^*|=\frac{n(n-1)}{2}$,

集合 A, B 有性质 T,且 $n=m$

$|A+B|=n^2-|A^*\cap B^*|\geqslant n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ (当且仅当 $A=B$ 时,取等号).

所以 $|A+B|$ 的最小值为 $\frac{n(n+1)}{2}$.

小结：

1.本题的新体现在：新的运算，新的性质和与数列结合的综合创新问题，所以属于难题.

2.解决本题用到了等价转化思想方法，反证法等，更重要的需要学生在推理论证，抽象概括，数学运算等方面能力比较强，所以体现此类题目综合性强的特点..

3.我们解决这个问题，还是抓住了利用题目新的信息，结合已有的知识，综合解决它.