第 17 课时函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像学习指南

【学习目标】

1. 会用五点法作出函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像，并会从图像变换角度分析由 y=sin x 到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图像的变化过程；

2. 会用换元法求函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期，单调区间，最值，对称轴与对称中心等性质.

【学法指导】

1. 借助同一函数，通过代数变形理解图像变换的过程

2. 对于复合函数，会应用换元法解决求单调区间，最值，对称性等问题

【学习任务单】

1. 复习回顾：

（1）先看由 $y = \sin x \longrightarrow y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 经历的图像变换过程

类型 1：振幅变换

$y = \sin x \longrightarrow y = A\sin x$

类型 2：周期变换

$y = \sin x \longrightarrow y = \sin\omega x$

类型 3：相位变换

$y = sinx \longrightarrow y = sin(x + \varphi)$

类型 4：平移变换

$y = \sin x \longrightarrow y = \sin x + k$

（2）一般化结论：y= $f(x)$ $\longrightarrow$y=A f(ωx+φ)+k 经历的图像变换过程

平移变换：$y = f(x) \longrightarrow y = f(x + \varphi)$

对称变换：$y = f(x) \longrightarrow y = f(-x)$；$y = f(x) \longrightarrow y = -f(x)$；$y = f(x) \longrightarrow y = -f(-x)$

翻折变换：$y = f(x) \longrightarrow y = f(|x|)$ ；$y = f(x) \longrightarrow y = |f(x)|$

伸缩变换：$y = f(x) \longrightarrow y = f(\omega x)$

2. 利用换元法求函数 y = Asin(ωx+φ)的单调区间和小区间最值问题的一般步骤.

求单调区间问题——原则（复合函数单调性同赠异减原则）——方向由外及里

步骤：(1)化简为 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$（A>0，ω>0）

(2)换元令 t=$\omega x + \varphi$，y= Asint

(3)解不等式$-\frac{\pi}{2} \le \omega x + \varphi \le \frac{\pi}{2}$，解得 x 的取值范围

(4)写成区间形式

求小区间最值问题——原则（复合函数求值域）——方向由里至外

步骤：(1) 换元令 t=$\omega x + \varphi$，y= Asint

(2)由 x 范围求出 t 的范围

(3)画出 y = sint 的图像，同时由范围截取图像，根据出现说明值域和最值

(4)由不等式的性质求出 y= Asint 的取值范围

(5)根据 y = sint 的最值点，由 t=$\omega x + \varphi$，反解 y = Asin($\omega x + \varphi$)的最值点

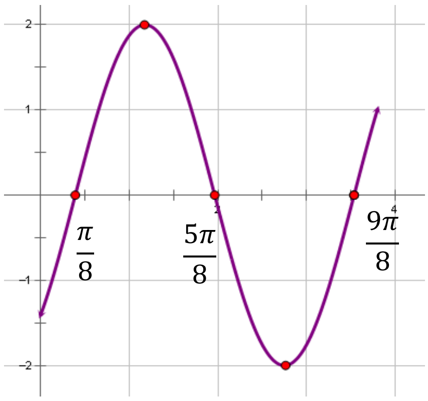
2. 典型例题分析

例 1：已知函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$=2sin(2$\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}$)

(1)求振幅，周期，初相
(2)五点法作出它在一个周期内的图像
(3)求它在区间$[\boldsymbol{0}，\boldsymbol{\pi}]$上的单增区间
解析：

（1）振幅为 2，周期为 T=$\frac{2\pi}{2}$=π，初相为-$\frac{\pi}{4}$

（2）列表



$2x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{8}$
Sin$(2x-\frac{\pi}{4})$	0	1	0	-1	0
y	0	2	0	-2	0

(3)令 t=2 $\boldsymbol{x}$ $-\frac{\pi}{4}$，次函数在 R 上为增函数，则 $y=2\sin t$,只需求它的增区间

所以 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{4}}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$

解得 $k\pi-\frac{\pi}{8}\leq \boldsymbol{x}\leq k\pi+\frac{3\pi}{8}$

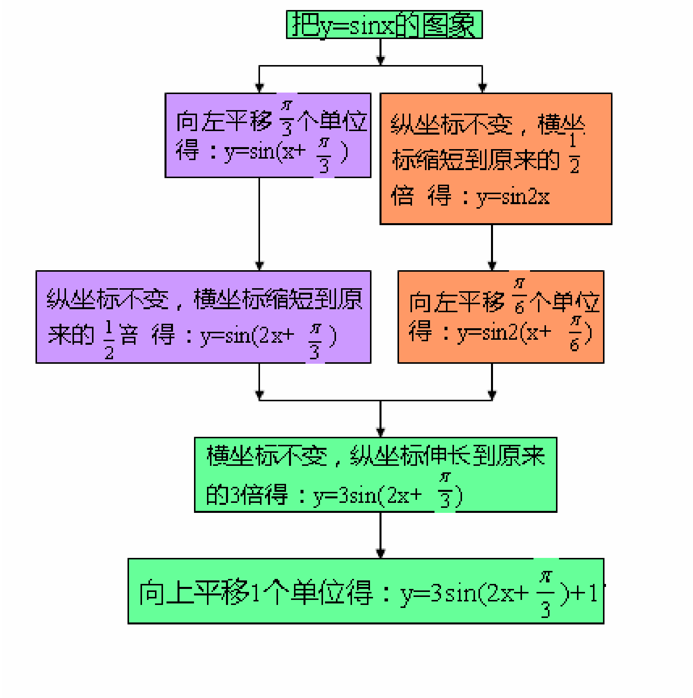
因为 x∈ $[\boldsymbol{0}，\boldsymbol{\pi}]$

令 k=0, $-\frac{\pi}{8}\leq \boldsymbol{x}\leq\frac{3\pi}{8}$,与 x∈ $[0，\pi]$取集， $\boldsymbol{x}\in\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$

K=1, $\frac{7\pi}{8}\leq \boldsymbol{x}\leq\frac{11\pi}{8}$，与 x∈ $[0，\pi]$取集，$\boldsymbol{x}\in\left[\frac{7\pi}{8}，\pi\right]$

所以$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$[0，\pi]$上的增区间为$\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$和$\left[\frac{7\pi}{8}，\pi\right]$

例 2. 请从图像变化角度叙述由函数 y=sin $\boldsymbol{x}$的图像到函数 y=3sin(2 $\boldsymbol{x}$+$\frac{\pi}{3}$) + 1经历的图像变换过程，并说明根据.



例 3.函数$\boldsymbol{f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)}$（$\mathbf{A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}}$）的部分图像如图所示.

(1)求$f(x)$的最小正周期及解析式;

(2)设 g(x)= $f(x)$-cos x,求函数 g(x)在区间$\left[0，\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值

解析:(1)由图可知最大值为 1，所以 A=1

由图$\frac{T}{2}$=$\pi, T=2\pi$，所以 $\omega=1$

因此$f(x)=sin(\mathrm{x}+\boldsymbol{\varphi})$，带入点（$\frac{\pi}{3}$，1）

$$sin(\frac{\pi}{3}+\boldsymbol{\varphi})=1$$

$\frac{\pi}{3}+\boldsymbol{\varphi}$=$\frac{\pi}{2}+2k\pi, \boldsymbol{\varphi}$=$\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$

所以令 k=0, $\boldsymbol{\varphi}$=$\frac{\pi}{6}$

所以$\boldsymbol{f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})}$

$\boldsymbol{(2)f(x)=\sin}(x+\frac{\pi}{6})$-cos$x$ = sin$x cos\frac{\pi}{6}$ + cos$x$sin$\frac{\pi}{6}$ − cos$x$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$sin$x$ − $\frac{1}{2}$cos$x$ = sin$(x-\frac{\pi}{6})$

令 t=$x-\frac{\pi}{6}$，*则* $\mathrm{y}=\sin t$

因为$x\in\left[\mathbf{0}，\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$,所以 t∈$\left[-\frac{\pi}{6}，\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right]$

当 t=$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$,即$x-\frac{\pi}{6}$=$\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}$，解得$x$=$\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{f(x)}_{max}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

当 t=-$\frac{\pi}{6}$,即$x-\frac{\pi}{6}$=-$\frac{\pi}{6}$，解得x=0 时，$f(x)_{min}=-\frac{1}{2}$