高一年级数学 5.7《函数的应用》学习指南

【学习目标】

1. 了解三角函数是描述周期变化现象的重要函数模型,并会用三角函数模型解决一些简单的实际问题.(重点)

2. 实际问题抽象为三角函数模型.(难点)

3. 通过建立三角模型解决实际问题，培养数学建模素养.

4. 借助实际问题求解，提升数学运算素养.

【学法指导】

解三角函数应用题的基本步骤：

(1)审清题意；

(2)搜集整理数据，建立数学模型；

(3)讨论变量关系，求解数学模型；

(4)检验，作出结论.

【学习任务单】

一. 知识回顾

三角函数的图像与性质

二. 典型例题分析

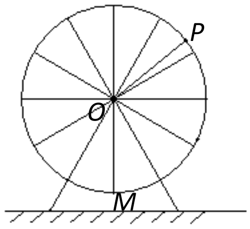
例 1. 海水受日月的引力，在一定的时候发生涨落的现象叫潮。一般地，早潮叫潮，晚潮叫汐。在通常情况下，船在涨潮时驶进航道，靠近码头；卸货后，落潮时返回海洋，下面是某港口在某季节每天的时间与水深关系表：

时间	0.00	3.00	6.00	9.00	12.00	15.00	18.00	21.00	24.00
水深	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0	7.5	5.0	2.5	5.0

（1） 选用一个函数来近似描述这个港口的水深与时间的函数关系。

（2） 一条货船的吃水深度（船底与水面的距离）为 4.75 米，安全条例规定至少要有 1.5 米的安全间隙（船底与洋底的距离），该船何时能进入港口？在港口能呆多久？

例 2 游乐场中的摩天轮按逆时针方向匀速旋转,，其最低点M距地面2 m，摩天轮的中心为O, 半径为10 m．若人从M点处登上摩天轮，运动t min 后位于点P处，此时相对于地面的高度为h m. 则高度h（单位：m）与时间t（单位：min）的函数解析式$h(t)=$______；在摩天轮转动的一圈内，在______min 的时间里，此人相对于地面的高度不超过17 m.

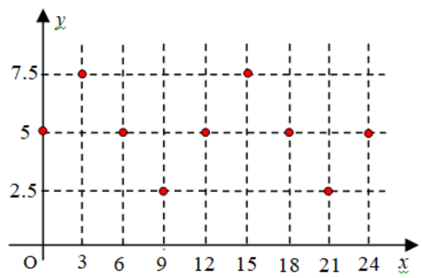


答案：

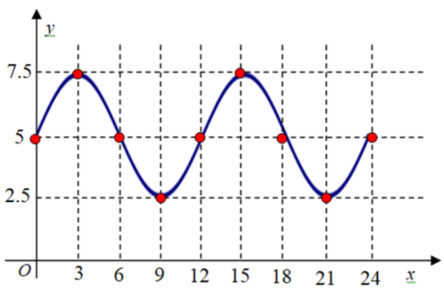
例 1:

分析：

观察表格发现水深呈现一种周期性变化规律，为了更加直观地观察出这种规律，请同学们根据数据绘制散点图。



观察散点分布的情况，跟我们所学过三角函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+h$非常的相像？



因此第一问就转化为求这段图像的解析式问题，用我们之前学过的知识就可以解决。

解：（1）设时间为 x，港口的水深为 y，

$A=2.5$，$h=5$，$T=12$，$\varphi=0$

由$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=12$, 得$\omega=\dfrac{\pi}{6}$

所以，这个港口的水深与时间关系可以用 $y=2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5$ 近似描述。

(2)分析：货船能进入港口需要满足的条件是什么？

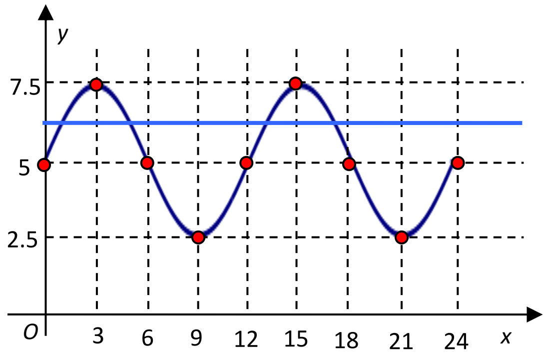
为了更直观的分析，我们用图来表示吃水深度、安全间隙。

由图中可以看出：只有当“实际水深≥吃水深度+安全间隙（即安全水深）”时，货船才可以进去或离开港口。

解：货船需要的安全水深为 4.75+1.5=6.25

只有当水深 $y\geq 6.25$ 时，货船才可以进入港口。

结合图形，



只需求出曲线 $y=2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5$ 与直线 $y=6.25$ 的四个交点 A、B、C、D 的横坐标 x_A、x_B、x_C、x_D 即可。

由 $2.5\sin\frac{\pi}{6}x+5=6.25$，得 $\sin\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$

显然 $x=1$ 是此方程的一个解，即 $x_A=1$

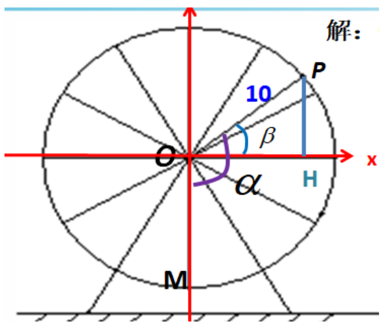
$x_B=6-1=5$，$x_C=12+1=13$，$x_D=18-1=17$

因此，货船可以在 1:00 进港，早晨 5:00 出港；或在中午 13:00 进港，下午 16:00 出港，每次在港口停留 4 小时。

例 2：

分析：

对于“每$8\min$旋转一周”的理解很关键，一周即2π弧度，所以一分钟转过的弧度数就是$\frac{2\pi}{8}$，因此，t min 转过的弧度就是$\frac{2\pi}{8}t=\alpha$，这样就可以得到$\angle POM$。



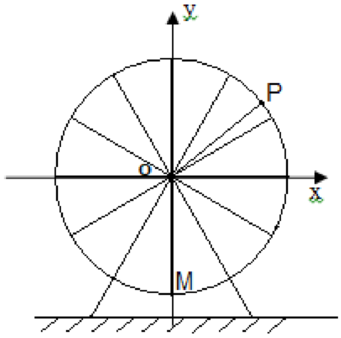
由于要求的是函数解析式，所以必须在平面直角坐标系下才可以，因此，从对称的角度建立平面直角坐标系。

比较好求的是 P 点的纵坐标，它要用到角β，$y_P=10\sin\beta$，但是β和t没有直接的关系，和t有直接关系的是α。而β与α有关系$\beta=\alpha-\frac{\pi}{2}$，这样就使$\beta$与$t$建立了联系，

进而$y_P=10\sin\beta=10\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=10\sin(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{2})$

（1）$\because\ \frac{2\pi}{8}t=\frac{\pi}{4}t$

$\therefore$经过$t\min$后OP转过的角的弧度数为$\frac{\pi}{4}t$.



如图建立直角坐标系，则点 P 的纵坐标为$10\sin\angle xOP$，

因为经过$t\min$后半径 OP 转过的角为$\frac{\pi}{4}t$，且从最低点登上摩天轮，

所以运动$t\min$后相对于地面的高度为$h(t)=10\sin(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{2})+12$.

（2）令$10\sin(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{2})+12\le 17$

得$\cos\frac{\pi}{4}t\ge-\frac{1}{2}$

由题意考虑$\frac{\pi}{4}t\in[0,2\pi]$

解得$0\le\frac{\pi}{4}t\le\frac{2\pi}{3}$，或$\frac{4\pi}{3}\le\frac{\pi}{4}t\le 2\pi$

所以$0\le t\le\frac{8}{3}$，或$\frac{16}{3}\le t\le 8$

$\because\ \frac{8}{3}+(8-\frac{16}{3})=\frac{16}{3}$

$\therefore$在摩天轮转动的一圈内，有$\frac{16}{3}$ min 此人相对于地面的高度不超过$17m$.

三、能力提升训练

1.心脏跳动时，血压在增加或减少．血压的最大值、最小值分别称为收缩压和舒张压，血压计上的读数就是收缩压和舒张压，读数 120/80 mmHg 为标准值．设某人的血压满足函数式 $p(t)=115+25\sin 160\pi t$，其中 $p(t)$为血压(mmHg)，t 为时间(min)，试回答下列问题：

(1)求函数 $p(t)$的周期；

(2)求此人每分钟心跳的次数；

(3)画出函数 $p(t)$的草图；

(4)求出此人的血压在血压计上的读数．

2.某游乐园的摩天轮最高点距离地面 108 米，直径长是 98 米，匀速旋转一圈需要 18 分钟．如果某人从摩天轮的最低处登上摩天轮并开始计时，那么：

(1)当此人第四次距离地面$\frac{69}{2}$ 米时用了多少分钟？

(2)当此人距离地面不低于$(59+\frac{49}{2}\sqrt{3})$米时可以看到游乐园的全貌，求摩天轮旋转一圈中有多少分钟可以看到游乐园的全貌？

1．［解］　(1)由于 $\omega=160\pi$，代入周期公式 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，可得 $T=\frac{2\pi}{160\pi}=\frac{1}{80}$(min)，所以函数 p(t)的周期为$\frac{1}{80}$ min.

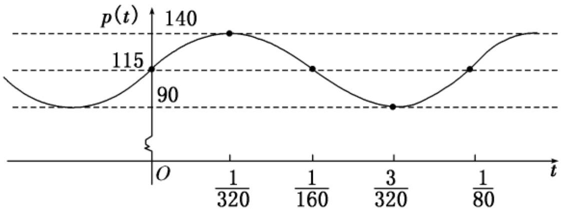
(2)每分钟心跳的次数即为函数的频率

$f=\frac{1}{T}=80$(次).

(3)列表：

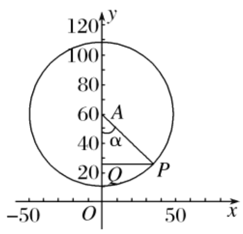
t	0	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{3}{320}$	$\frac{1}{80}$
p(t)	115	140	115	90	115

描点、连线并向左右扩展得到函数 p(t)的简图如图所示：



(4)由图可知此人的收缩压为 140 mmHg，舒张压为 90 mmHg.

2．**解**　(1)如图，建立平面直角坐标系，设此人登上摩天轮 t 分钟时距地面 y 米，则 $\alpha=\frac{2\pi}{18}t=\frac{\pi}{9}t$.



由 $y=108-\frac{98}{2}-\frac{98}{2}\cos\frac{\pi}{9}t=-49\cos\frac{\pi}{9}t+59(t\geqslant 0)$.

令 $-49\cos\frac{\pi}{9}t+59=\frac{69}{2}$,

得 $\cos\frac{\pi}{9}t=\frac{1}{2}$,

所以$\frac{\pi}{9}t=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$,

故 $t=18k\pm3$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $t=3,15,21,33$.

故当此人第四次距离地面$\frac{69}{2}$ 米时用了 33 分钟.

(2)由题意得 $-49\cos\frac{\pi}{9}t+59\geqslant 59+\frac{49}{2}\sqrt{3}$,

即 $\cos\frac{\pi}{9}t \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故不妨在第一个周期内求即可，

所以$\frac{5\pi}{6} \leqslant \frac{\pi}{9}t \leqslant \frac{7\pi}{6}$，解得$\frac{15}{2} \leqslant t \leqslant \frac{21}{2}$，

故$\frac{21}{2}-\frac{15}{2}=3$.

因此摩天轮旋转一圈中有 3 分钟可以看到游乐园的全貌.

四、小结与反思

处理曲线拟合和预测的问题时，通常需以下几个步骤

(1)根据原始数据，绘出散点图；

(2)通过散点图，做出“最贴近”的直线或曲线，即拟合直线或拟合曲线；

(3)根据所学函数知识，求出拟合直线或拟合曲线的函数关系式；

(4)利用函数关系式，根据条件对所给问题进行预测和控制，以便为决策和管理提供依据.