

# 利用对数解决一类应用问题的学习指南

## 复习任务单

### 【学习目标】

- 1、掌握指数式与对数式的互化，体会引入指数式与对数式互化对简化运算的优势；
- 2、理解并记忆对数运算性质的公式，会用公式解决简单实际应用问题.
- 3、通过公式的运用和实际问题的解决，提高分析问题和数学运算的能力.

### 【学法指导】

利用对数解决一类应用问题这一节主要的两个问题：一是利用对数解决大数运算的问题；第二是体会指数式与对数式互化式如何减少思维负担. 本节课的重点在于对数的减法运算性质的应用与指对互化. 难点问题在于从实际问题中抽象出对数关系. 本节课主要考察指数式与对数式的互化，对数运算性质的简单应用，题型以选择题为主，中高档难度. 本类小题用到的基本知识：

对数式与指数式的互化： $x = \log_a N \Leftrightarrow a^x = N (a > 0, a \neq 1, N > 0)$

对数的运算性质 如果  $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ ，那么

① 加法： $\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$

② 减法： $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

③ 数乘： $n \log_a M = \log_a M^n (n \in R)$

④ 指数幂： $\log_{a^n} M^m = \frac{m}{n} \log_a M (n, m \in R)$

⑤ 换底公式： $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} (b > 0, \text{且 } b \neq 1)$

特殊情形： $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b > 0, b \neq 1)$ ，推广  $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$

例 1：通过科学研究发现：地震时释放的能量  $E$ （单位：焦耳）与地震里氏震级  $M$  之间的关系为  $\lg E = 4.8 + 1.5M$ . 已知 2011 年甲地发生里氏 9 级地震，2019 年乙地发生里氏 7 级地震，若甲、乙两地地震释放能量分别为  $E_1, E_2$ ，则  $E_1$  与  $E_2$  的关系式为

- A.  $E_1 = 32E_2$       B.  $E_1 = 64E_2$       C.  $E_1 = 1000E_2$       D.  $E_1 = 1024E_2$

$$\lg E_1 = 4.8 + 1.5M_1 \quad \text{①}$$

$$\lg E_2 = 4.8 + 1.5M_2 \quad \text{②}$$

①—② 得

$$\lg E_1 - \lg E_2 = (4.8 + 1.5M_1) - (4.8 + 1.5M_2)$$

$$\lg \frac{E_1}{E_2} = 1.5M_1 - 1.5M_2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = 10^3 \quad \text{即} \quad E_1 = 1000E_2$$

答案: C

$$\text{分析: 另解: } E_1 = 10^{4.8+1.5M_1} \quad \text{①}$$

$$E_2 = 10^{4.8+1.5M_2} \quad \text{②}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{4.8+1.5M_1}}{10^{4.8+1.5M_2}} = 10^{4.8+1.5M_1-(4.8+1.5M_2)} = 10^{1.5(M_1-M_2)} = 10^3$$

## 阅读与思考

### 对数的发明

16、17 世纪之交, 天文、航海、工程、贸易以及军事快速发展, 对大数的运算提出了更高的要求, 改进数字计算方法、提高计算速度和准确度成了当务之急. 苏格兰数学家纳皮尔 (J. Napier, 1550—1617) 在研究天文学的过程中, 经过对运算体系的多年研究, 最终找到了简化大数运算的有效工具, 于 1614 年出版了《奇妙的对数定律说明书》, 标志着对数的诞生. 在这本书中, 纳皮尔借助运动学, 用几何术语阐述了对数方法.

从对数的发明过程可以看到, 社会生产、科学技术的需要是数学发展的主要动力. 建立对数与指数之间联系的过程表明, 使用较好的符号体系和运算规则不仅对数学的发展至关重要, 而且可以大大减轻人们的思维负担.

本题来源与教材 125-126 页的例题 5.

**例 5** 尽管目前人类还无法准确预报地震, 但科学家通过研究, 已经对地震有所了解, 例如, 地震时释放出的能量  $E$  (单位: 焦耳) 与地震里氏震级  $M$  之间的关系为

$$\lg E = 4.8 + 1.5M.$$

2011 年 3 月 11 日, 日本东北部海域发生里氏 9.0 级地震, 它所释放出来的能量是

2008年5月12日我国汶川发生里氏8.0级地震的多少倍(精确到1)?

**解:** 设里氏9.0级和8.0级地震的能量分别为 $E_1$ 和 $E_2$ .

由 $\lg E = 4.8 + 1.5M$ , 可得

$$\lg E_1 = 4.8 + 1.5 \times 9.0,$$

$$\lg E_2 = 4.8 + 1.5 \times 8.0.$$

$$\text{于是, } \lg \frac{E_1}{E_2} = \lg E_1 - \lg E_2$$

$$= (4.8 + 1.5 \times 9.0) - (4.8 + 1.5 \times 8.0) = 1.5.$$

$$\text{利用计算工具可得, } \frac{E_1}{E_2} = 10^{1.5} \approx 32.$$

虽然里氏9.0级地震与里氏8.0级地震仅相差1级, 但前者释放出来的能量却是后者的约32倍.

想一想, 为什么两次地震的里氏震级仅差1级, 而释放的能量却相差那么多呢?

例2: 区块链作为一种革新的技术, 已经被应用于许多领域, 包括金融、政务服务、供应链、版权和专利、能源、物联网等. 在区块链技术中, 若密码的长度设定为256比特, 则密码一共有 $2^{256}$ 种可能, 因此, 为了破解密码, 最坏情况需要进行 $2^{256}$ 次哈希运算. 现在有一台机器, 每秒能进行 $2.5 \times 10^{11}$ 次哈希运算, 假设机器一直正常运转, 那么在最坏情况下, 这台机器破译密码所需时间大约为(参考数据 $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.477$ )

( )

A.  $4.5 \times 10^{73}$  秒

B.  $4.5 \times 10^{65}$  秒

C.  $4.5 \times 10^7$  秒

D. 28 秒

此题分析思路是指对运算互化的逆用, 和2017年北京高考题的第8题分析思路类似.

由题意分析: 这台机器破译密码所需时间的计算方法为破译密码需要的哈希运算次数除以机器每秒进行的哈希运算次数.

即:  $\frac{2^{256}}{2.5 \times 10^{11}}$  分析知道这个数一定比28大, 观察A, B, C, 三个选项将这个数化简

$$\frac{2^{256}}{2.5 \times 10^{11}} = 4.5 \times \frac{2^{259}}{9 \times 10^{12}}$$

但是数 $\frac{2^{259}}{9 \times 10^{12}}$ 比较大, 所以采用取对数的方式进行估算.

$$\lg \frac{2^{259}}{9 \times 10^{12}} = \lg 2^{259} - \lg 9 \times 10^{12}$$

$$\lg \frac{2^{259}}{9 \times 10^{12}} = \lg 2^{259} - (\lg 9 + \lg 10^{12})$$

$$\lg \frac{2^{259}}{9 \times 10^{12}} = 259 \lg 2 - 2 \lg 3 - 12$$

由题中给的参考数据  $\lg 2 \approx 0.3010, \lg 3 \approx 0.477$

$$\text{得出 } \lg \frac{2^{259}}{9 \times 10^{12}} = 259 \times 0.301 - 2 \times 0.477 - 12 = 65.005$$

$$\text{所以 } \frac{2^{259}}{9 \times 10^{12}} \approx 10^{65}$$

答案：B