

比较大小常用方法学习指南

复习任务单

【学习目标】

- 1、归纳出比较大小的常用方法。
- 2、理解并掌握比较大小的常用方法，并能选用适当的方法解决两个数或式比较大小的问题；.
- 3、通过比较大小的探索过程，培养数学运算、逻辑推理核心素养.

【学法指导】

复习：指数式、对数式的运算，不等式单元基础知识，指数函数、对数函数、幂函数的性质。

【问题清单】

问题 1 填空（用 $<$ 、 $>$ 、 $=$ 填空）

(1) 若 $a-b>0$ ，则 a b ；若 $a-b<0$ ，则 a b ；
若 $a-b=0$ ，则 a b 。

(2) 若 $\frac{a}{b}>1$ ，则 a b ；若 $\frac{a}{b}<1$ ，则 a b ；

若 $\frac{a}{b}=1$ ，则 a b 。

问题 2 两数或式做差后差式与 0 比较大小，对差式的怎样处理才能更好地与 0 比较？
做商后差式与 1 比较大小，怎样处理商式？才能更好地与 1 比较？

问题 3 怎样比较具体的数值的大小？

问题 4 如何构造和选取中间值的？

【典型例题】

例 1. 已知 $x > y > 0$, 比较 $x^3 - 2y^3$ 与 $xy^2 - 2x^2y$ 的大小

$$\begin{aligned}\text{解: } & (x^3 - 2y^3) - (xy^2 - 2x^2y) \\ &= x^3 - xy^2 + 2x^2y - 2y^3 \\ &= x(x^2 - y^2) + 2y(x^2 - y^2) \\ &= (x + 2y)(x + y)(x - y)\end{aligned}$$

因为 $x > y > 0$

$$(x + 2y)(x + y)(x - y) > 0$$

所以 $x^3 - 2y^3 > xy^2 - 2x^2y$

注: 做差, 因式分解时也可以 $x^3 + 2x^2y$ 与 $-xy^2 - 2y^3$ 提取公因式

例 2. 设 $0 < x < 1$, $a > 0$, $a \neq 1$, 比较 $|\log_a(1 - x)|$

与 $|\log_a(1 + x)|$ 的大小

$$\text{解: } \frac{|\log_a(1 - x)|}{|\log_a(1 + x)|} = \frac{|\log_a(1 - x)|}{\log_a(1 + x)}$$

$$= |\log_{(1+x)}(1 - x)|$$

因为 $0 < x < 1$, 所以 $0 < 1 - x < 1$, $1 + x > 1$

$$|\log_{(1+x)}(1 - x)| = -\log_{(1+x)}(1 - x) = \log_{(1+x)} \frac{1}{1 - x}$$

(目标: $\log_{(1+x)} \frac{1}{1 - x}$ 与 1 大小 $1 = \log_{(1+x)}(1 + x)$)

转化为 $\frac{1}{1 - x}$ 与 $1 + x$ 的大小比较)

$$|\log_{(1+x)}(1 - x)| = -\log_{(1+x)}(1 - x) = \log_{(1+x)} \frac{1}{1 - x} > \log_{(1+x)}(1 + x) = 1$$

所以 $|\log_a(1 - x)| > |\log_a(1 + x)|$

方法总结: 作差法、。

作差比较时对差式的处理的目的与 0 比较, 其过程: 作差 $\rightarrow$ 差式的变形 $\rightarrow$ 符号判定
差式的处理方法: 因式分解、配方、通分、分子(分母)有理化等等

作商法 作商比较时, 商式与 1 比大小时往往使用放缩的方法

例 3. 比较下列各组中两数的大小

$$(1) 0.4^{0.1}, 0.4^{0.3} \quad (2) \log_{0.3} 2, \log_{0.3} 5$$

$$(3) 4^{0.2}, 8^{0.1} \quad (4) 0.4^{0.1}, 0.5^{0.1}$$

分析：(1) $0.4^{0.1}$ 与 $0.4^{0.3}$ 这两个数都是指数式，

有相同的底， $0.4^{0.1}$ ，与 $0.4^{0.3}$ 可以看成是

函数 $y = 0.4^x$ 的两个自变量 $x_1 = 0.1$ ， $x_2 = 0.3$ 的

函数值，由函数的单调性可得这两个数的大小。

(3) $4^{0.2}$ ， $8^{0.1}$ 底改写为 2 再按 (1) 的方法可解

(4) 考虑幂函数 $y = x^{0.1}$

单调性方法总结：形如 a^s 与 a^t 的两个数或式比较大小，由于底相同，指数不同，考虑函数模型 $y = a^x$ ， a^s 与 a^t 看作自变量 x 分别取 s, t 时的函数值，从而利用函数 $y = a^x$ 的单调性得出结论。(同理形如 $\log_a m$ ，与 $\log_a n$ ，函数模型为 $y = \log_a x$ ；形如 m^s 与 n^s ，函数模型为 $y = x^n$ ；)

通过已知 $f(x)$ 的单调性，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 转化为比较 x_1 和 x_2 的大小问题，找对应的函数模型是关键

图像法。对比较的两数怎样处理，才能与图像有关？

若 $2^x = 3^y > 1$ ，则 x, y 的大小关系为？

处理为 $(x, 2^x)$ $(y, 3^y)$ 两个函数图象中的两个点间的位置关系

例 4. 比较 $\log_2 3$ 与 $\log_3 4$ 的大小

解： $\log_3 4 - \log_2 3$

$$= \log_3 4 - \frac{1}{\log_3 2}$$

$$= \frac{\log_3 4 \cdot \log_3 2 - 1}{\log_3 2}$$

转化为 $\log_3 4 \cdot \log_3 2$ 与 1 的大小比较问题。

$$\log_3 4 \cdot \log_3 2 < \left(\frac{\log_3 4 + \log_3 2}{2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\log_3 8}{2} \right)^2 < \left(\frac{\log_3 9}{2} \right)^2 = 1$$

方法总结：

形如 a^s 与 n^t 、 $\log_a m$ ，与 $\log_b n$ 比较大小，除了运用做差、作商法比较大小外，还可以通过中间值的方法，中间值常常选用数 0、1 等，

分析思路 2: $\log_2 3$ 与 $\log_3 4$ 都介于 1 与 2 之间, 考虑他们与 $\frac{3}{2}$ 的大小关系.

$$\log_2 3 = \frac{1}{2} \log_2 9 > \frac{1}{2} \log_2 8 = \frac{3}{2}$$

$$\log_3 4 = \frac{1}{2} \log_3 16 < \frac{1}{2} \log_3 27 = \frac{3}{2}$$

中间值法 利用不等关系的传递性: 若 $A > B, B > C$ 则 $A > C$

B 为中间值, 解题关键在于中间值的选取, 中间值常常选用 0、1。

有时可根据两数的结构来构造, 如 a^s 与 n^t 比较大小时, 可考虑构造 a^t 或 n^s 比较, 以 a^t 或 n^s 作为中间值, 两数均与构造数有相同的底或相同的指数。

比较大小的问题常常以指数函数、对数函数为载体, 将函数的单调性、奇偶性以及指数式、对数式的运算的考查综合在一起, 较好的考查学生的运算能力。