

高一数学 第五章三角函数复习拓展提升答案

1. $\frac{7\pi}{8}$

【解析】

【分析】

根据 $x \in \left[0, \frac{9\pi}{16}\right]$, 得到 $t = 4x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right]$, 如图所示, 根据对称性得到 $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{8}$,

$x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{8}$, 代入计算得到答案.

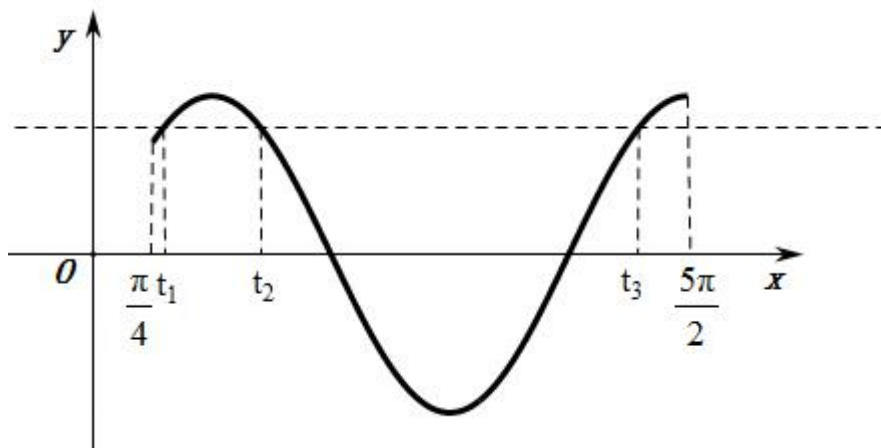
【详解】

$x \in \left[0, \frac{9\pi}{16}\right]$, 则 $t = 4x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}\right]$, 如图所示: 则 $t_1 + t_2 = \pi$, $t_2 + t_3 = 3\pi$

即 $4x_1 + \frac{\pi}{4} + 4x_2 + \frac{\pi}{4} = \pi, \therefore x_1 + x_2 = \frac{\pi}{8}$; $4x_2 + \frac{\pi}{4} + 4x_3 + \frac{\pi}{4} = 3\pi, \therefore x_2 + x_3 = \frac{5\pi}{8}$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2(x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) = \frac{7\pi}{8}$$

故答案为: $\frac{7\pi}{8}$



【点睛】

本题考查了函数零点问题, 三角形函数对称性, 意在考查学生的综合应用能力.

2. 4

【解析】

【分析】

由条件利用正弦函数的图象特征, 进行分类讨论, 求得每种情况下正数 ω 的最小值, 再进行比较从而得出结论.

【详解】

① 若只有 $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ 两点在函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图象上,

$$\text{则有 } \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{4}) = 1, \quad \sin \omega \cdot \frac{\pi}{2} \neq 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} \omega \cdot \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \text{或 } \omega = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in Z \\ \omega \cdot \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \\ \omega \cdot \frac{\pi}{2} \neq k\pi, k \in Z \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} \omega = 12k + 2, \text{或 } \omega = 12k + 4, k \in Z \\ \omega = 8k + 2, k \in Z \\ \omega \neq 2k, k \in Z \end{cases}, \text{求得 } \omega \text{ 无解.}$$

② 若只有点 $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 在函数 $f(x) = \sin(\omega x)$ 的图象上,

$$\text{则有 } \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{2}) = 0, \quad \sin(\omega \cdot \frac{\pi}{4}) \neq 1,$$

$$\text{故有 } \begin{cases} \omega \cdot \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \text{或 } \omega \cdot \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in Z \\ \omega \cdot \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in Z \\ \omega \cdot \frac{\pi}{4} \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} \omega = 12k + 2, \text{或 } \omega = 12k + 4, k \in Z \\ \omega = 2k, k \in Z \\ \omega \neq 8k + 2, k \in Z \end{cases}, \text{求得 } \omega \text{ 的最小值为 } 4.$$

③ 若只有点 $B\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 在函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图象上,

$$\text{则有 } \sin \omega \cdot \frac{\pi}{6} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \omega \frac{\pi}{4} = 1, \quad \sin \omega \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\text{故有} \begin{cases} \omega \cdot \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \\ \omega \cdot \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in Z \\ \omega \cdot \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi + \frac{\pi}{3}, \text{且} \omega \cdot \frac{\pi}{6} \neq 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in Z \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} \omega = 8k + 2, k \in Z \\ \omega = 2k, k \in Z \\ \omega \neq 12k + 2 \text{ 且 } \omega \neq 12k + 4, k \in Z \end{cases}, \text{求得 } \omega \text{ 的最小正值为 } 10,$$

综上可得， ω 的最小正值为 4，

故答案为：4.

【点睛】

本题考查正弦函数的图象特征，考查函数与方程思想、分类讨论思想、数形结合思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意分三种情况进行讨论.

3. ②④

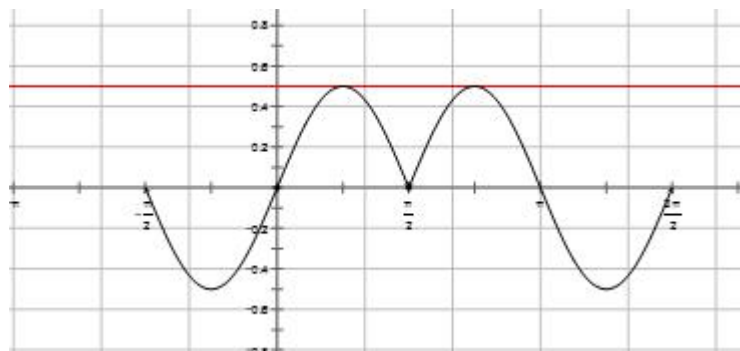
【解析】

【分析】

根据三角函数性质，逐一判断选项得到答案.

【详解】

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], f(x) = \sin x |\cos x| = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin 2x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\frac{1}{2} \sin 2x, x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$



根据图像知：

① $f(x)$ 的图象关于直线 y 轴对称，错误

② $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 正确

③ $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, 错误

④ $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$, 正确

故答案为②④

【点睛】

本题考查了三角函数的化简, 三角函数的图像, 三角函数性质, 意在考查学生对于三角函数的综合理解和应用.

4. $-\frac{\sqrt{6}}{12}$

【解析】

【分析】

先利用诱导公式对函数 $f(\alpha) = \frac{\sin(\alpha - 5\pi)\cos(8\pi - \alpha)\tan(-\alpha - \pi)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ 进行化简, 再求解

出 $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$, 进而求解出 $f(\alpha)$ 的值.

【详解】

$$\begin{aligned}\text{解: } f(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha - 5\pi)\cos(8\pi - \alpha)\tan(-\alpha - \pi)}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} \\ &= \frac{[-\sin(\alpha)]\cos(\alpha)[- \tan(\alpha)]}{[-\cos(\alpha)]\sin(\alpha)} \\ &= -\tan \alpha,\end{aligned}$$

由 $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$ 化简得 $\sin \alpha = -\frac{1}{5}$,

因为 α 是第三象限角,

$$\text{所以 } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\text{故 } \tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12},$$

$$\text{所以 } f(\alpha) = -\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

$$\text{故答案为: } -\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

【点睛】

本题考查了三角函数诱导公式、同角三角函数的关系等知识点，熟练运用公式是解决本题的关键.

$$5. (1) -\frac{7}{2}; (2) g(a) = \begin{cases} 1, & a \leq -2 \\ -\frac{a^2}{2} - 2a - 1, & -2 < a < 2 \\ 1 - 4a, & a \geq 2 \end{cases}; (3) a = -1, f(x)_{\max} = 5.$$

【解析】

【分析】

(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = 2\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$, 利用二次函数的性质

可得结果; (2) 利用同角三角函数间的基本关系化简函数解析式后, 根据二次函数对称轴的位置分三种情况讨论, 再根据二次函数求最小值的方法求出 $f(x)$ 的最小值 $g(a)$ 的值即可;

(3) 把 $g(a) = \frac{1}{2}$ 代入到第二问的 $g(a)$ 的第二和第三个解析式中, 求出 a 的值, 代入 $f(x)$ 中得到 $f(x)$ 的解析式, 利用配方可得 $f(x)$ 的最大值.

【详解】

$$(1) \text{ 当 } a = 1 \text{ 时, } f(x) = 2\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 2\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{ 当 } \cos x = \frac{1}{2} \text{ 时, 有 } f(x)_{\min} = g(a) = -\frac{7}{2};$$

$$(2) \text{ 令 } t = \cos x, \text{ 则 } t \in [-1, 1], y = 2t^2 - 2at - 2a - 1$$

$$= 2\left(t - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 1, \text{ 开口向上, 对称轴 } t = \frac{a}{2},$$

①当 $\frac{a}{2} \leq -1$ 时, 即 $a \leq -2$ 时, $y = 2t^2 - 2at - 2a - 1$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增

所以当 $t = -1$ 时, 有 $y_{\min} = g(a) = 1$

当 $-1 < \frac{a}{2} < 1$ 时, 即 $-2 < a < 2$ 时, $y = 2t^2 - 2at - 2a - 1$ 在 $\left[-1, \frac{a}{2}\right]$ 上单调递减

在 $\left[\frac{a}{2}, 1\right]$ 上单调递增, 所以当 $t = \frac{a}{2}$ 时, 有 $y_{\min} = g(a) = -\frac{a^2}{2} - 2a - 1$

③当 $\frac{a}{2} \geq 1$ 时, 即 $a \geq 2$ 时, $y = 2t^2 - 2at - 2a - 1$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递减

所以当 $t = 1$ 时, 有 $y_{\min} = g(a) = 1 - 4a$;

$$\text{综上, } g(a) = \begin{cases} 1, & a \leq -2 \\ -\frac{a^2}{2} - 2a - 1, & -2 < a < 2 \\ 1 - 4a, & a \geq 2 \end{cases}$$

(3) 若 $g(a) = \frac{1}{2}$,

当 $a \leq -2$ 时, 显然不成立;

当 $-2 < a < 2$ 时, $-\frac{a^2}{2} - 2a - 1 = \frac{1}{2}$ 即 $a^2 + 4a + 3 = 0$, $(a+1)(a+3) = 0$, 得 $a = -1$ 或

$a = -3$ (舍去);

当 $a \geq 2$ 时, 则 $1 - 4a = \frac{1}{2}$ 得 $a = \frac{1}{8}$ (舍去),

综上, $a = -1$,

$$\text{此时, } f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 2\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$\therefore$ 当 $\cos x = 1$ 时, 有 $f(x)_{\max} = 5$.