学习目标：用向量法推到两角差的余弦公式用公式求三角函数的值要依据条件灵活处理，注意整体思想方法，注意角的变化；用换元的方法得到两角和余弦公式. 用诱导公式及同角三角函数关系推导两角和、差的正弦、正切公式. 要理解公式的联系和演变过程，会正用、逆用、变形用公式，注意解题中从要求的结果出发，执果索因是找到解题方法、打开解题思路的重要途径，注意“知其一，可得其一堆”的方程思想的应用.

学法指导：三角恒等变换是三角函数部分的重点内容，其本质是“变其形不变其质”。三角恒等变换通常是三角函数的图像与性质、解三角形相结合，或直接化简求值，主要围绕着“角的变换、名称的变换、公式的变换、常数的变换以及三角变换的应用”等展开。

三角公式是三角恒等变换的工具，听哦各国综合运用公式可以将一般三角函数 变形划归为基本三角函数，从而求值、化简和研究其图像和性质。公式体系的数理和公式特征把握解题的保障。在公式复习中形成良好的知识网络，才能顺利地逢山开路、遇水搭桥.

知识清单：

两角差的余弦公式

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

特殊化 $\alpha=\beta$

二倍角公式

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=2\cos^2\alpha-1$

$=1-2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

令 $-\beta=\beta$，整体换元

两角和的余弦公式

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

应用诱导公式

两角和（差）正弦公式

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

齐次化切

两角和（差）正切公式

$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

降幂公式

$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\tan^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

例 1 已知 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，α 是第四象限角，求 $\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$，$\cos(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)$，$\tan(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$的值.

解：由 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，α 是第四象限角，得 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2 a}=\sqrt{1-(-\dfrac{3}{5})^2}=\dfrac{4}{5}$.

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{\sin a}{\cos a}=-\dfrac{3}{4}$.

于是有 $\sin(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\dfrac{3}{5})=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$,

$\cos(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times(-\dfrac{3}{5})=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$,

$\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\tan a-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan a\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan a-1}{1+\tan a}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1+(-\frac{3}{4})}=-7$.

点评：本例是运用和差角公式的基础题，安排这个例题的目的是为了训练学生思维的有序性，逐步培养他们良好的思维习惯.

例 2. 求下列三角函数值.

（1）已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，**求** $\sin 2\alpha$ **的值.**

解：由 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$，**得** $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$

$\therefore\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{120}{169}$

（2）已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，**求** $\sin 2\alpha$ **的值.**

解： $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\frac{7}{25}$

（3）已知 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，**求** $\tan 2\alpha$ **的值.**

解： $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{3}{4}$

例 3. 求下列各式的值。

（1） $\sin15^\circ\cdot\cos15^\circ$

解： $\sin15^\circ\cdot\cos15^\circ=\frac{1}{2}\left(2\sin15^\circ\cdot\cos15^\circ\right)=\frac{1}{2}\sin30^\circ=\frac{1}{4}$

（2） $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$

解： $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（3） $\frac{2\tan22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$

解： $\frac{\tan22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}=\frac{1}{2}\tan45^\circ=\frac{1}{2}$

（4） $2\cos^2\frac{\pi}{12}-1$

解： $2\cos^2\frac{\pi}{12}-1=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

即时小结：

解决这一类求值问题，需要观察式子的结构特点，与二倍角的计算公式进行联系，最后选择恰当的公式，实现一倍角与二倍角之间的转化。

例 4.已知为锐角，$\tan\alpha=\frac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，

求：（1） $\cos 2\alpha$ 的值；

（2） $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

分析 ：第（1）问中已知单角 α 的三角函数值，而所求三角函数式中角是与 α 有关的二倍角。因此可利用同角三角函数的基本关系式和二倍角公式获得解答.由二倍角公式欲求 $\cos 2\alpha$ 只要求出 $\cos\alpha$ 或 $\sin\alpha$ 即可. $\cos 2\alpha$

第一问：解法 1：由 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ 得 $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$，

代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

因此 $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$.

因为 α 为锐角，所以 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.

由二倍角公式得

.

解法 2：观察已知条件 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ 中与所求目标之间的函数名称的差异，联想到“1”的变换，实现结构上的“齐次”状态，应用弦切互化公式，即可一步到位.

因为 $\tan\alpha=\frac{4}{3}$，

所以 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=-\frac{7}{25}$.

小结：三角恒等变形的目的在于“消除差异，化异为同”.而题目中经常出现不同名或不同角的三角函数，这就往往需要化异为同，借助于同角三角函数的关系式、诱导公式及两角和差公式进行辅助解题.

(2)结合已知条件可构造 $\alpha-\beta=2\alpha-(\alpha+\beta)$，因此欲求 $\tan(\alpha-\beta)$，只需求出 $\tan 2\alpha$ 和 $\tan(\alpha+\beta)$ 即可.

第 2 问：解法 1：因为 α 为锐角，所以 $2\alpha\in(0,\pi)$.

由（1）得 $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$，所以 $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{24}{25}$.

从而 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

又因为 α，β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

从而 $\tan(\alpha+\beta)=-2$.

进而 $\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan(\alpha+\beta)}{1+\tan 2\alpha\cdot\tan(\alpha+\beta)}=-\dfrac{2}{11}$.

第 2 问解法 2：由 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$ 可知欲求 $\tan(\alpha-\beta)$，

只需分别求 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 即可.

因为 α，β 为锐角，所以 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.

所以 $\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

因为 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

由（1）得 $\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

故 $\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

进而可得 $\tan\beta=2$.

所以 $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\dfrac{\frac{4}{3}-2}{1+\frac{4}{3}\times 2}=-\dfrac{2}{11}$.

例 5 已知 $\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5},\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{3}{4}\pi$，求 $\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ 的值.

分析：1）从目标式看出要求 $\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$，只需求出 2α 的正弦和余弦，

再用两角和的余弦公式求出即可

2）由于 $2\alpha+\dfrac{\pi}{4}=2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})-\dfrac{\pi}{4}$，所以要求 $\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$，

只需求出 $\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ 正弦和余弦，再用两角差的余弦公式求出即可.

解法 1：因为 $\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{3}{4}\pi,\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{5}$，

所以 $\dfrac{3\pi}{2}\le\alpha+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{7}{4}\pi$，得 $\dfrac{5\pi}{4}\le\alpha\le\dfrac{3}{2}\pi$，即 $\dfrac{5\pi}{2}\le 2\alpha\le 3\pi$.

由此可得：$\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})}=-\dfrac{4}{5}$.

从而 $\cos 2\alpha=\sin 2(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=2\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})\cdot\cos(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{24}{25}$.

$$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{7}{25}.$$

所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)=-\frac{31}{50}\sqrt{2}.$$

解法 2：因为 $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{3}{4}\pi,\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，

所以 $\frac{3\pi}{2}\le\alpha+\frac{\pi}{4}\le\frac{7}{4}\pi$，得 $\frac{5\pi}{4}\le\alpha\le\frac{3}{2}\pi$，即 $\frac{5\pi}{2}\le 2\alpha\le 3\pi$.

第 2 问解法 2：前两步同解法 1

因为 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{3}{5}$，

所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{3}{5}\sqrt{2}$.

两边平方得（ $\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin 2\alpha=\frac{18}{25}$.

从而 $\sin 2\alpha=\frac{7}{25}$，$\cos 2\alpha=\sin 2(\alpha+\frac{\pi}{4})=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{24}{25}$.

所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos 2\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2\alpha-\sin 2\alpha)=-\frac{31}{50}\sqrt{2}.$$

解法 3：因为 $\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{3}{4}\pi,\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{3}{5}$，

所以 $\frac{3\pi}{2}\le\alpha+\frac{\pi}{4}\le\frac{7}{4}\pi$，得 $\frac{5\pi}{4}\le\alpha\le\frac{3}{2}\pi$，即 $\frac{5\pi}{2}\le 2\alpha\le 3\pi$.

由此可得： $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\frac{4}{5}$.

于是有 $\sin 2(\alpha+\frac{\pi}{4})=2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})\cdot\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\frac{24}{25}$

$\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{4})=2\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})^2-1=-\frac{7}{25}$.

因此 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\cos[2(\alpha+\frac{\pi}{4}\quad\frac{\pi}{4}]$

$$=\cos 2(\alpha+\frac{\pi}{4})\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin 2(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=-\frac{31}{50}\sqrt{2}.$$

小结：解题中要注意角的范围，$\frac{3\pi}{2} \le \alpha + \frac{\pi}{4} \le \frac{7}{4}\pi$ 和 $\frac{5\pi}{2} \le 2\alpha \le 3\pi$ 是不可或缺的，忽视角的范围限制，容易产生运算错误.判断角的范围的方法有（1）三角函数值的正负；（2）利用三角函数单调性与特殊角比较三角函数值的大小.

三角函数的化简、求值、证明，都离不开三角恒等变换.学习了和角公式，差角公式，倍角公式以后，我们就有了进行三角变换的新工具，从而使三角变换的内容、思路和方法更加丰富和灵活，同时也为培养和提高我们的推理、运算、实践能力提供了广阔的空间和发展的平台.对于三角变换,由于不同的三角函数式不仅会有结构形式方面的差异,而且还会有所包含的角,以及这些角的三角函数种类方面的差异,因此三角恒等变换常常首先寻找式子所包含的各个角之间的联系,并以此为依据选择可以联系它们的适当公式,这是三角式恒等变换的重要特点.