《函数压轴小题的解题策略》

【学习目标】

1.学会解决函数中双变量的任意存在性问题，体会解题策略中的数学本质**.**

2. 能够借助于函数的图象进行分析，利用图象描述和分析函数问题，建立数与形的联系，探索解决函数问题的思路.

3.通过对函数部分压轴题研究，丰富数学探索经验，提升直观想象的核心素养，进而提升分析问题解决问题的能力，感悟数学中的函数与方程、转化与化归、分类讨论的思想方法.

【预备知识】

1.函数的概念以及函数的性质.

2.用导数研究函数的单调性、极值和最值.

3.基本初等函数的图象和性质.

【典型例题】

【2019 海淀一模理 14】已知函数 $f(x)=x$， $g(x)=ax^2-x$，

其中 $a>0$. 若 $\forall x_1\in[1,2]$, $\exists x_2\in[1,2]$，

使得 $f(x_1)\ f(x_2)=g(x_1)\ g(x_2)$ 成立，则 $a=$____.

分析：本题中有两个函数，并且含有两个变量，这两个变量没有关联，即它们在各自区间上的取值是任意的相互独立的，因此我们可以把两个变量分开讨论.

1 转化结论，探寻解题思路

因为若 $\forall x_1\in[1,2],\exists x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)\ f(x_2)=g(x_1)\ g(x_2)$ 成立，也就是使得：

$x_1\cdot x_2\ =\left(ax_1^2-x_1\right)\cdot\left(ax_2^2-x_2\right)$ 成立.

由 $x_1x_2\neq 0$，两边同时除以 x_1x_2，化简得：

$1=(ax_1-1)\cdot(ax_2-1)$

请同学们思考：此时我们可以把两个变量 x_1 , x_2 分开了吗？

思路一：转化为： $\dfrac{1}{ax_1-1}=ax_2-1$ ，

教师分析：这样转化出来的左右两边函数都带有参数 a ，
需要分类讨论，解决起来相对麻烦，不太可取。

因此，我们继续转化.

不等式两边展开，化为：$1=a^2x_1\cdot x_2-ax_1-ax_2+1$，

即：$0=a^2x_1\cdot x_2-ax_1-ax_2$

因为$a>0$，所以$ax_1\cdot x_2-x_1-x_2=0$，

请同学们思考：此时我们可以把两个变量x_1，x_2分开了吗？

思路二：由$x_1x_2\neq 0$，则两边同时除以x_1x_2，

得到：$a-\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=0$

即：$\frac{1}{x_1}=a-\frac{1}{x_2}$

教师分析：此时把不等式两边看成两个函数，令$h(x)=\frac{1}{x},x\in[1,2]$，$t(x)=a-\frac{1}{x},x\in[1,2]$，这样得到的左右两边的这两个函数$h(x)$，$t(x)$相对简单，这个问题就变得容易多了！

2.解决问题

令$h(x)=\frac{1}{x},x\in[1,2]$，$t(x)=a-\frac{1}{x},x\in[1,2]$

本题转化为$\forall x_1\in[1,2],\exists x_2\in[1,2]$，使得$h(x_1)=t(x_2)$成立，

当x_1在区间$[1,2]$变动起来，$h(x_1)$也随之变化，所有$h(x_1)$的取值构成了它的值域$A=[\frac{1}{2},1]$，

同理，当x_2在区间$[1,2]$变动起来，$t(x_2)$也随之变化，所有$t(x_2)$的取值构成了它的值域$B=[a-1,a-\frac{1}{2}]$

对于每一个$x_1\in[1,2]$，都有一个$x_2\in[1,2]$，使得$h(x_1)=t(x_2)$，

即他们的函数值相等，

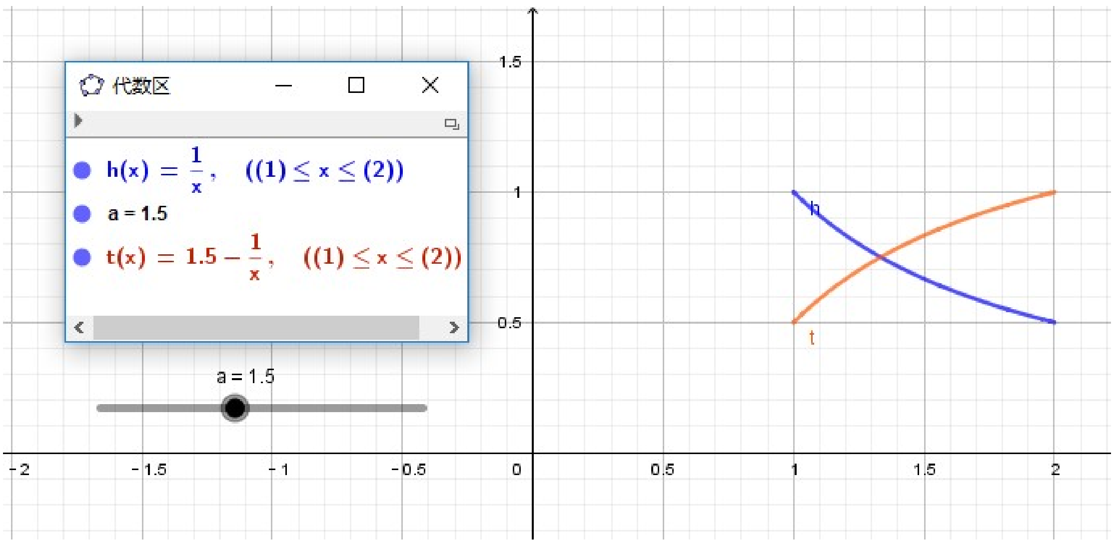
教师提问：那么，从值域的角度考虑，他们的值域之间有什么关系呢？

回答：$h(x)$的值域是$t(x)$值域的子集，即：$A\subseteq B$

所以有$\begin{cases} a-\dfrac{1}{2}\geq 1 \\ a-1\leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$，解之得：$\begin{cases} a\geq \dfrac{3}{2} \\ a\leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$，

所以$a=\dfrac{3}{2}$.

如图所示：



【小结提升】

若对任意的$x_1\in D$，都存在$x_2\in E$，使$f(x_1)=g(x_2)\Leftrightarrow f(x)$的值域是$g(x)$的值域的子集.

练习：已知函数$f(x)=x-4$，$g(x)=x^3-3a^2x-2a$（其中$a\geq 1$），

（1）若对任意$x_1\in[0,2],x_2\in[0,1]$都有$f(x_1)=g(x_2)$成立，

则实数a的取值范围是____

（2）若存在$x_1,x_2\in[0,1]$使得$f(x_1)=g(x_2)$成立，则实数a的取值范围是__________.

分析：本题有两个函数，并且含有两个变量，并且两个变量还是相互独立的，因此，还是分别研究等式两边的函数，从他们的值域入手.

1 转化结论，探寻解题思路

（1）由题知，

对于每一个$x_1\in[0,2]$，都有一个$x_2\in[0,1]$，使得$f(x_1)=g(x_2)$；

同时，对于每一个$x_2\in[0,1]$，都有一个$x_1\in[0,2]$，使得$f(x_1)=g(x_2)$.

教师提问：那么，从值域的角度考虑，他们的值域之间有什么关系呢？

回答：前一句话说明函数 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集；后一句话说明函数 $g(x)$ 值域是函数 $f(x)$ 值域的子集，因此说明两个函数值域相等！

（2） 由题知，存在 $x_1,x_2\in[0,1]$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，即：

在区间 $[0,1]$ 存在一个 x_1，相应的有一个 $x_2\in[0,1]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，即他们的函数值相等.

教师提问：那么，从值域的角度考虑，他们的值域之间有什么关系呢？

回答：说明两个函数值域有交集！

这样，我们只需要找到两个函数的值域就可以了.

2.解决问题

解：（1）当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)\in[-4,-2]$，

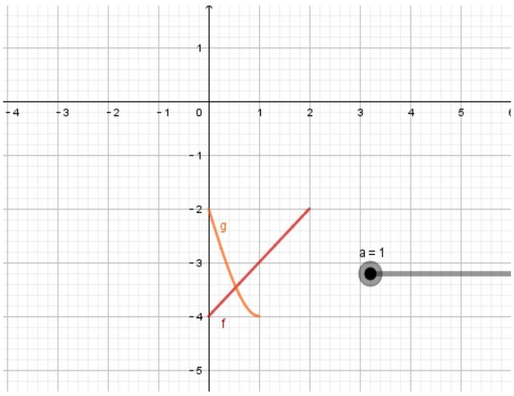
$g'(x)=3(x^2-a^2)$，

因为 $a\geq 1$，所以 $x\in[0,1]$ 时，$g'(x)\leq 0$

所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

从而，当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)\in[\mathrm{g}(1),\mathrm{g}(0)]$

即 $g(x)\in[1-2a-3a^2,-2a]$



若对任意 $x_1\in[0,2],x_2\in[0,1]$ 都有 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，

则，$f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 的值域相等，

所以 $\begin{cases}1-2a-2a^2=-4\\-2a=-2\end{cases}$，即 $a=1$

（2）由（1）知 $f(x)\in[-4,-2]$，$g(x)\in[1-2a-3a^2,-2a]$

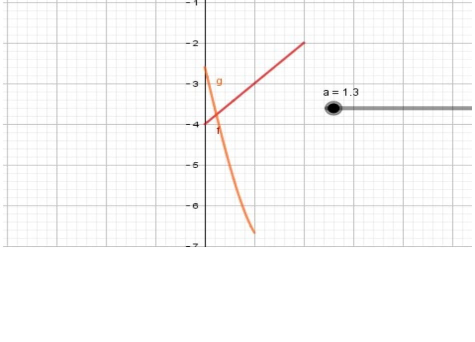
若存在 $x_1,x_2\in[0,1]$ 使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立，

则 $[-4,-2]\cap[1-2a-3a^2,-2a]\neq\phi$

又 $a\geq 1$，则 $1-2a-3a^2\leq -4$，所以只需 $-2a\geq -4$

即 $a\leq 2$

因此 $a\in[1,2]$



【小结提升】

（1）若对任意的 $x_1 \in D$， $x_2 \in E$，使 $f(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 的值域相等.

（2）若存在 $x_1 \in D$， $x_2 \in E$，使 $f(x_1)=g(x_2) \Leftrightarrow f(x)$ 的值域与 $g(x)$ 的值域有交集.

【本专题学法指导】

1、 对于函数中的双变量任意存在性的问题，由于两个变量没有关联，即它们在各自区间上的取值具有任意性，因此这类题型都可以转化成任意性问题和存在性问题分别处理，最后转化为函数最值或者值域问题加以解决。

2、 压轴题之所以难，在于它考察学生的灵活的思维能力，需要学生具有很强的分析问题的能力，因此在日常学习中应注重过程，积累经验，提升数学学科素养.