【数列求和问题】专题作业答案

1.解：（I）设$\{a_n\}$的公差为d．

因为$a_1=-10$，所以$a_2=-10+d$，$a_3=-10+2d$，$a_4=-10+3d$．

因为a_2+10，a_3+8，a_4+6成等比数列，

所以$(a_3+8)^2=(a_2+10)(a_4+6)$．所以$(-2+2d)^2=d(-4+3d)$．

解得$d=2$．所以$a_n=a_1+(n-1)d=2n-12$．

（II）由（I）知，$a_n=2n-12$．所以，

当$n\geq 7$时，$a_n>0$；当$n\leq 6$时，$a_n\leq 0$．

所以，S_n的最小值为$S_6=-30$．

2.解：（I）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意得$d=\dfrac{a_4-a_1}{3}=\dfrac{12-3}{3}=3$．

所以$a_n=a_1+(n-1)d=3n$ $(n=1,2,\cdots)$．

设等比数列$\{b_n-a_n\}$的公比为q，由题意得

$q^3=\dfrac{b_4-a_4}{b_1-a_1}=\dfrac{20-12}{4-3}=8$，解得$q=2$．

所以$b_n-a_n=(b_1-a_1)q^{n-1}=2^{n-1}$．

从而$b_n=3n+2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$．

（II）由（I）知$b_n=3n+2^{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$．

数列$\{3n\}$的前n项和为$\dfrac{3}{2}n(n+1)$，数列$\{2^{n-1}\}$的前n项和为$1\times\dfrac{1-2^n}{1-2}=2^n-1$．

所以，数列$\{b_n\}$的前n项和为$\dfrac{3}{2}n(n+1)+2^n-1$．

3.解：（I）根据题意得

$\begin{cases}p+q=3,\\16p+4q=24.\end{cases}$ 即$\begin{cases}p+q=3,\\4p+q=6.\end{cases}$．

解得$\begin{cases}p=1,\\q=2.\end{cases}$

所以$S_n=n^2+2n$．

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2+2n)-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$．

因为$a_1=3=2\times 1+1$也适合上式，

所以$a_n=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$．

（II）因为$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=\dfrac{2^{2n+3}}{2^{2n+1}}=4$，且$b_1=2^{a_1}=2^3=8$，

所以数列$\{b_n\}$是以8为首项，4为公比的等比数列，

所以$T_n=\dfrac{8(1-4^n)}{1-4}=\dfrac{8}{3}(4^n-1)$.

4.解：（I）因为$a_1=1$，$a_{n+1}=e\cdot a_n$（$n\in N^*$），

所以数列$\{a_n\}$是1为首项，e为公比的等比数列，

所以$a_n=e^{n-1}$.

（II）由（I）知，$\ln a_n=\ln e^{n-1}=n-1$，

所以 $T_n=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$，

所以$\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_3}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}$

$=\dfrac{2}{1\times2}+\dfrac{2}{2\times3}+\dfrac{2}{3\times4}+\cdots+\dfrac{2}{n(n-1)}$

$=2[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+\cdots+(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n})]$

$=2(1-\dfrac{1}{n})$.

因为$\dfrac{1}{n}>0$，所以$1-\dfrac{1}{n}<1$.所以$2(1-\dfrac{1}{n})<2$

即$\dfrac{1}{T_2}+\dfrac{1}{T_3}+\cdots+\dfrac{1}{T_n}<2$

5.解：（I）$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=4$.

（II）因为$S_n=2a_n-1(n\in N^*)$，

所以，当$n\geq2$时，有$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$，

则$a_n=2a_n-2a_{n-1}(n\geq2)$，即$a_n=2a_{n-1}(n\geq2)$.

所以$\{a_n\}$是以1为首项，2为公比的等比数列.所以$a_n=2^{n-1}$.

因为 $b_{n+1}=a_n+b_n$ ，所以 $b_{n+1}-b_n=2^{n-1}$.

则 $b_2-b_1=2^0$，

$b_3-b_2=2^1$，

…

$b_n-b_{n-1}=2^{n-2}$，

以上 $n-1$ 个式子相加得： $b_n-b_1=\frac{1\times(1-2^{n-1})}{1-2}$，

又因为 $b_1=2$，所以 $b_n=2^{n-1}+1\,(n\in\mathbf{N}^*)$.