

课题：数列求和问题

【学习目标】

- (1) 能熟练使用等差（比）数列求和公式，准确运用等差（比）数列通项公式 a_n 与前 n 项和 S_n 之间的关系求解；
- (2) 能在具体的问题情境中，发现数列的等差（比）关系，并解决与数列和相关的问题；
- (3) 巩固提升分析问题、解决问题的能力，感受数列与函数的共性与差异，体会数学的整体性.

【预备知识】

一、必备公式

(1) 等差数列求和公式 $S_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 等比数列求和公式 $S_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

二、常见求和方法

(1) 等差（比）数列公式法.

(2) 分组转化法求和：若一个数列是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成，则求和时可用分组求和法，分别求和后相加减.

(3) 裂项相消法求和：把数列的通项拆成两项之差，在求和时中间的一些项可以相互抵消，从而求得其和.

常见的裂项技巧： $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($\{a_n\}$ 为等差数列， $a_n \neq 0$ ，公差为 $d \neq 0$)

【典型例题】

例 1. 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_4 = 4$ ，等差数列 $\{b_n\}$ 中， $S_7 = -14$ ， $b_2 = -4$ ， $n \in \mathbf{N}^+$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求等差数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最小值及取得最小值时的 n 值；

(III) 设 $c_n = a_n + b_n$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若 $T_n > 0$ ，求 n 的最小值.

[试题分析]

(I) 本问是求数列通项公式基本问题.

本问解题思路: 运用方程思想求解数列基本量 a_1, d 代入等比数列通项公式即可.

(II) 本问是求等差数列前 n 项和为 s_n 的最值问题.

1. 本问解题思路: 一是可以通过“数列 $\{b_n\}$ 通项公式发现数列变化情况”求解;

二是利用“数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 s_n , 类比二次函数求最值问题”求解.

2. 本问易错点: 易忽略“数列与函数的差异 $n \in \mathbf{N}^+$ 、 $n=5$ 或 6 两种情况”.

(III) 本问是分组求和以及与数列前 n 项和 T_n 相关的不等式问题.

1. 本问解题思路: 一是分组求和的方法求数列 $\{c_n\}$ 前 n 项和 T_n ; 二是利用函数

观点发现数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n 的变化求解.

2. 本问难点: 借助二次函数、指数函数单调性分析问题.

3. 本问易错点: 直接用代入特殊值的方法猜测 T_n 的转折点, 缺乏理论依据.

[解题过程]

(I) 由数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_1 = \frac{1}{2}, a_4 = 4$, 得 $a_4 = a_1 q^3 = 4$, 解得 $q = 2$.

则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-2}, n \in \mathbf{N}^+$.

(II) 由数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, $S_7 = \frac{7(b_1 + b_7)}{2} = 7b_4 = -14$, $b_2 = -4$ 得

$b_n = n - 6$, $S_n = \frac{n(n-11)}{2}$, 当 $n=5$ 或 6 时, S_n 取得最小值为 -15 .

(III) $c_n = a_n + b_n = n - 6 + 2^{n-2}$

$$T_n = (-5 - 4 + \cdots + n - 6) + (2^{-1} + 2^0 + \cdots + 2^{n-2})$$

$$= \frac{n(n-11)}{2} + \frac{2^n - 1}{2}.$$

当 $n \geq 5$ 时, 类比二次函数、指数函数的单调性可知 $\frac{n(n-11)}{2} \geq -15$,

$$\frac{2^n - 1}{2} \geq \frac{31}{2}, \text{ 所以 } T_n > 0;$$

$$\text{当 } n=4 \text{ 时, } T_4 = \frac{-4 \times 7 + 2^4 - 1}{2} < 0;$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } T_3 = \frac{-3 \times 8 + 2^3 - 1}{2} < 0;$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } T_2 = \frac{-2 \times 9 + 2^2 - 1}{2} < 0;$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } T_1 = \frac{-1 \times 10 + 2^1 - 1}{2} < 0.$$

所以, n 的最小值为 5

【小结提升】

运用数列是一类特殊的函数, 特别是等差数列通项与一次函数、等差数列前 n 和与二次函数、等比数列与指数函数的联系, 研究数列的变化情况.

例 2、已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -1$, $a_n + a_{n+1} = 0$; 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{c_n\}$ 中 $c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 和 T_n .

(III) 若数列 $\{d_n\}$ 中 $d_n = 2^{b_n}$, 求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 和 M_n .

(IV) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 $2n$ 项和 P_{2n} .

[试题分析]

(I) 本问是求数列通项公式基本问题.

解题思路: 1. 发现数列的等比关系, 求解数列基本量 a_1, d 代入等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式. 2. 运用数列前 n 项和 S_n 与 b_n 之间的关系求 $\{b_n\}$ 通项公式, 易忽略对 $n=1$ 的检验.

(II) 本问是运用裂项相消方法求前 n 项和为 S_n 的问题.

本问易错点：易忽略 $\frac{1}{2}$ 或者不清楚乘以 $\frac{1}{2}$ 的原理.

(III) 本问是求一个新构成数列前 n 项和 T_n 的问题.

1. 本问解题思路：发现新构成数列 $\{d_n\}$ 的等比关系，运用等比数列求和公式求解.
2. 本问易错点：直接用等比数列求和公式，缺乏对等比数列的说明，新数列的公比易错.

(IV) 本问是求一个新构成数列前 $2n$ 项和的问题.

1. 本问解题思路：发现新构成数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的摆动特点，运用分组求和方法求解.
2. 本问难点：借助数列摆动的特点将数列重组求和.
3. 本问易错点：直接用等比数列 $\{a_n\}$ 的和与等差数列 $\{b_n\}$ 的和乘在一起求解，组合后数列项数易错.

[解题过程]

(I) 因为 $a_n = -a_{n+1}$ ， $a_1 = -1$ ，

所以 $\{a_n\}$ 为等比数列，其中公比为 $q = -1$ ，首项为 $a_1 = -1$.

所以 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = (-1)(-1)^{n-1}$ ，

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = (-1)^n$ ， $n \in \mathbb{N}^+$.

当 $n=1$ 时， $b_1 = S_1 = 1$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $b_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$ ，

经检验 $n=1$ 也成立.

所以 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n = 2n-1$ ， $n \in \mathbb{N}^+$.

$$(II) \quad c_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{故 } T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$$

(Ⅲ) 由 $d_n = 2^{b_n} = 2^{2n-1}$, 可知数列 $\{d_n\}$ 是以 2 为首项, 4 为公比的等比数列,

$$\text{故 } M_n = 2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2n-1} = \frac{2 - 2^{2n-1} \cdot 2^2}{1 - 2^2} = \frac{2^{2n+1} - 2}{3}$$

(Ⅳ) 由 (Ⅰ) 得, $a_n \cdot b_n = (-1)^n (2n-1)$.

设数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 P_{2n} , 则

$$\begin{aligned} P_{2n} &= -1 + 3 - 5 + 7 - \cdots - (4n-3) + (4n-1) \\ &= (-1+3) + (-5+7) + \cdots + [-(4n-3) + (4n-1)] = 2n. \end{aligned}$$

【小结提升】

1. 善于从具体问题情景中去发现数列等差、等比关系;
2. 掌握根据数列通项公式的不同特点选择不同的求和方法;

【学法建议】

1. 要重视审题, 这样才能充分挖掘题目信息, 找到恰当的突破口;
2. 多积累数列不同通项公式形式所适用的求和方法.