专题名称：等差（比）数列及其性质的综合问题

【学习目标】

教学重点：

1、熟练掌握等差（等比）数列的相关概念、基本公式和基本性质，并能灵活运用定义、公式、性质解决相关问题；

2、能利用方程思想解决等差（等比）数列的综合问题.

教学难点：能用函数的观点理解数列的问题.

【预备知识】

	等差数列	**等比数列**
定义（符号）	$d=a_n-a_{n-1}\left(n\ge 2\right)$ 或 $d=a_{n+1}-a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$	$q=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\left(n\ge 2\right)$ 或 $q=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$
公差（比）	$d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}\left(n,m\in\mathbf{N}^*,n\ne m\right)$	$q^{n-m}=\dfrac{a_n}{a_m}\left(n,m\in\mathbf{N}^*,n\ne m\right)$
通项公式	$a_n=a_1+\left(n-1\right)d\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 或 $a_n=a_m+\left(n-m\right)d\left(n,m\in\mathbf{N}^*\right)$ 从**函数观点**认识：类一次函数 $a_n=dn+a_1-d\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$	$a_n=a_1q^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 或 $a_n=a_mq^{n-m}\left(n,m\in\mathbf{N}^*\right)$ 从**函数观点**认识：类指数函数
前 n 项和 S_n	$S_n=\dfrac{n\left(a_1+a_n\right)}{2}$ $=na_1+\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}d$ 从**函数观点**认识：类二次函数 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$	$S_n=\begin{cases}na_1, & q=1,\\ \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}, & q\ne 1\end{cases}$
等差（等比）中项	如果 a,A,b 成等比数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**，即 $A=\dfrac{a+b}{2}$. **推广：** 若数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等差数列，	如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a,G,b 成等比数列，那么称这个数 G 为 a 与 b 的**等比中项**，即 $G=\pm\sqrt{ab}$（a,b 同号）. **推广：** 若数列 $\left\{a_n\right\}$ 为等比数列，

		且 $m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$， 若 $m+n=p+q$， 则 $a_m+a_n=a_p+a_q$.	且 $m,n,s,t\in\mathbf{N}^*$， 若 $m+n=s+t$，则 $a_ma_n=a_sa_t$.
单调性	影响因素	受公差 d 一个因素影响	受首项 a_1 和公比 q 两个因素影响
	递增数列	$d>0$	$a_1>0,q>1$ 或 $a_1<0,0<q<1$
	递减数列	$d<0$	$a_1>0,0<q<1$ 或 $a_1<0,q>1$
	常数列	$d=0$	$q=1$
	摆动数列		$q<0$

【典型例题】

例 1：（1）（2020 大兴高三期末 6）

若数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$2a_{n+1}=2a_n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则 a_1 与 a_5 的等比中项为（　　）

（A）±2　　（B）2　　（C）$\pm\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

【分析】

1、通过运算转化条件，利用数列的定义判定特殊数列

将条件“$2a_{n+1}=2a_n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$”转化为“$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$”进行数列的判定.

2、灵活运用数列的性质，将文字语言符号化

将结论“a_1 与 a_5 的等比中项”转化为“$\pm\sqrt{a_1a_5}$”进行求解.

【解法】由题知：$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

又 $a_1=1$，故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公差的等差数列，

$\therefore a_n=\dfrac{n+1}{2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$\therefore a_5=3$

\ a_1与a_5的等比中项为$\pm\sqrt{a_1a_5}=\pm\sqrt{3}$. 故选 C.

【突破方法】

1、利用数列定义判定特殊数列时，要明确数列的首项（a_1）和常数（公差d或公比q）；

2、同号的两个数才有等比中项，并且有两个.

【变式】若等比数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_5=3$，则$a_3=$（　　）

（A）± 2　　（B）2　　（C）$\pm\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

【解法一】利用等比中项

由题易得：$a_3^2=a_1a_5=3$，$\therefore a_3=\pm\sqrt{3}$，

由等比数列隔项同号可知：$\therefore a_3=\sqrt{3}$，故选 D.

【突破方法】在利用等比中项时，注意与等比数列性质的结合.

【解法二】建立数列中基本量的基本关系式（通性通法）

由题易得：$q^4=\dfrac{a_5}{a_1}=3$，$\therefore q^2=\sqrt{3}\ \therefore a_3=a_1q^2=\sqrt{3}$，故选 D.

（2）（2011 北京理 11）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_4=-4$，则公比$q=$________；

$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=$__________.

【解析】建立数列中基本量的基本关系式（通性通法）

设公比为q，则依题：$q^3=\dfrac{a_4}{a_1}=-8$，$\therefore q=-2$，

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

$\therefore |a_n|=\left|\dfrac{1}{2}\cdot(-2)^{n-1}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|(-2)^{n-1}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot 2^{n-1}=2^{n-2}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

$\therefore \dfrac{|a_n|}{|a_{n-1}|}=2\left(n\geq 2\right)$，

又$|a_1|=\dfrac{1}{2}$，故数列$\{|a_n|\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，2 为公比的等比数列，

$\therefore |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-2^n\right)}{1-2}=\dfrac{1}{2}\left(2^n-1\right)=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$.

【突破方法】掌握含绝对值的运算.

例 2：（2014 北京理 5）

设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，则“$q>1$”是“$\{a_n\}$为递增数列”的（　　）

（A）充分而不必要条件　　　　（B）必要而不充分条件
（C）充分必要条件　　　　　（D）既不充分也不必要条件

【解析】影响等比数列$\{a_n\}$单调性的因素有首项a_1和公比q两个因素.

由等比数列$\{a_n\}$为递增数列$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1>0 & q>1 \\ a_1<0 & 0<q<1 \end{cases}$

可知：“$q>1$”$\nRightarrow$“$\{a_n\}$为递增数列”，

“$q>1$”$\nLeftarrow$“$\{a_n\}$为递增数列”，故选 D.

例 3：（2018 北京文 15）

设$\{a_n\}$是等差数列，且$a_1=\ln 2$，$a_2+a_3=5\ln 2$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求$e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}$.

（Ⅰ）**【解法一】建立数列中基本量的基本关系式（通性通法）**

设$\{a_n\}$的公差为d，则

$\because a_2+a_3=5\ln 2$，$\therefore 2a_1+3d=5\ln 2$，

又$a_1=\ln 2$，所以$d=\ln 2$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n\ln 2$.

【解法二】利用等差中项

设$\{a_n\}$的公差为d，则

由题可知：$a_1+a_2+a_3=3a_2=6\ln 2$，$\therefore a_2=2\ln 2$，

又$a_1=\ln 2$，所以$d=\ln 2$，$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n\ln 2$.

（Ⅱ）**【解法一】先化简,再运算**

$\because e^{a_n}=e^{n\ln 2}=e^{\ln 2^n}=2^n$

$\therefore \dfrac{e^{a_n}}{e^{a_{n-1}}}=\dfrac{2^n}{2^{n-1}}=2$

$\therefore \left\{e^{a_n}\right\}$是首项为$2$，公比为$2$的等比数列.

$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=2\times\dfrac{1-2^n}{1-2}=2(2^n-1)$.

【解法二】直接运算

$\because \dfrac{e^{a_n}}{e^{a_{n-1}}}=e^{a_n-a_{n-1}}=e^{\ln 2}=2$，$e^{a_1}=e^{\ln 2}=2$，

$\therefore \left\{e^{a_n}\right\}$是首项为$2$，公比为$2$的等比数列.

$\therefore e^{a_1}+e^{a_2}+\cdots+e^{a_n}=2\times\dfrac{1-2^n}{1-2}=2(2^n-1)$.

【突破方法】掌握指数与对数运算.

例 4：（2019 年高考全国 II 卷理 19）

已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_1=0$，$4a_{n+1}=3a_n-b_n+4$，$4b_{n+1}=3b_n-a_n-4$.

（I）证明：$\{a_n+b_n\}$是等比数列，$\{a_n-b_n\}$是等差数列；

（II）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

【分析】

（I）要证明$\{a_n+b_n\}$是等比数列，只需寻找到一个不为零的常数q，

使得$a_{n+1}+b_{n+1}=q\left(a_n+b_n\right)$成立；

同理，要证明$\{a_n-b_n\}$是等差数列，只需寻找到一个常数d，使得

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+d$成立.

（II）由（I）可求得数列$\{a_n+b_n\}$与数列$\{a_n-b_n\}$的通项公式，再通过消元分别求得a_n,b_n.

【解析】（I）由$\begin{cases}4a_{n+1}=3a_n-b_n+4\\4b_{n+1}=3b_n-a_n-4\end{cases}$，

得$4(a_{n+1}+b_{n+1})=2(a_n+b_n)$，即$a_{n+1}+b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+b_n)$，

又$a_1+b_1=1$，所以$\{a_n+b_n\}$是首项为1，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列.

由$\begin{cases}4a_{n+1}=3a_n-b_n+4\\4b_{n+1}=3b_n-a_n-4\end{cases}$，

得$4(a_{n+1}-b_{n+1})=4(a_n-b_n)+8$，即$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n+2$，

又$a_1-b_1=1$，所以$\{a_n-b_n\}$是首项为1，公差为2的等差数列.

（II）由（I）知，$a_n+b_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，$a_n-b_n=2n-1$，

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\left[\left(a_n+b_n\right)+\left(a_n-b_n\right)\right]=\frac{1}{2^n}+n-\frac{1}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{2}\left[\left(a_n+b_n\right)-\left(a_n-b_n\right)\right]=\frac{1}{2^n}-n+\frac{1}{2}.$$

【小结提升】

1、通过这节课的学习，我们要培养问题转化的能力，能对题目中的条件进行合理的转化与变形；

2、在解决数列的问题过程中，要灵活应用它们的定义、性质、公式进行解题.

【本专题学法指导】

1、掌握等差（等比）数列的判断方法；

2、能用函数的观点理解数列：数列是定义在自然数集或其有限子集上的函数.数列问题本质上就是函数问题；

3、掌握方程思想：在分析和解决有关数列的综合问题时要注意运用数学思想方法.