课题：函数的图象及其性质的应用(二)

学习目标

1.能够结合函数的图象解决函数零点等相关问题；

2.综合运用函数的知识、思想和方法解决问题，变抽象为具体.

预备知识：

1.函数的性质;

2.函数的零点、方程的根、函数图象与 x 轴交点的横坐标之间的等价转化关系.

典型例题

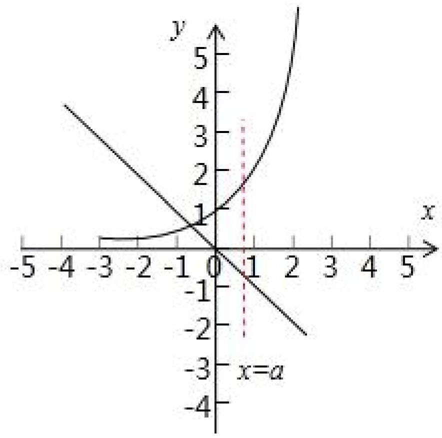
例题 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\geq a\\ -x, x<a\end{cases}$，若函数 $f(x)$ 存在零点，则实数 a 的取值范围是

A．$(-\infty,0)$　　B．$(-\infty,1)$

C．$(1,+\infty)$　　D．$(0,+\infty)$

分析：本题先画出函数的图象，再研究分界点的位置，进而求解.

【解析】函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, x\geq a\\ -x, x<a\end{cases}$ 的图象如图：



若函数 $f(x)$ 存在零点，则实数 a 的取值范围是（0，+∞）.

故选 D.

【点拨】本题考查分段函数，函数的零点，考查数形结合思想以及计算能力.

例题 2 若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=f(x)$且 $x\in[-1,1]$时，$f(x)=|x|$，则方程 $f(x)=\log_3|x|$的根的个数是

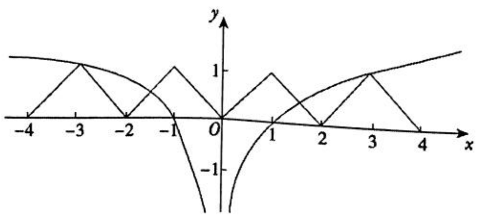
A．4　　B．5

C．6　　D．7

分析：本题可以利用函数的周期性画出图象，再判断两个函数交点的个数.

【解析】因为函数 $f(x)$满足 $f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$是周期为 2 的周期函数.

又 $x\in[-1,1]$时，$f(x)=|x|$，所以函数 $f(x)$的图象如图所示.



再作出 $y=\log_3|x|$的图象，如图，

易得两函数的图象有 4 个交点，

所以方程 $f(x)=\log_3|x|$有 4 个根.

故选 A.

【点拨】本题考查函数与方程，函数的零点、方程的根、函数图象与 x 轴交点的横坐标之间是可以等价转化的.

例题 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$．若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geq-\dfrac{8}{9}$，则 m 的取值范围是

A. $\left(-\infty,\dfrac{9}{4}\right]$　　　　B. $\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right]$　　　　D. $\left(-\infty,\dfrac{8}{3}\right]$

分析：本题解题的关键是能够得到 $x\in(2,3]$ 时函数的解析式，并求出函数值为 $-\dfrac{8}{9}$ 时对应的自变量的值.

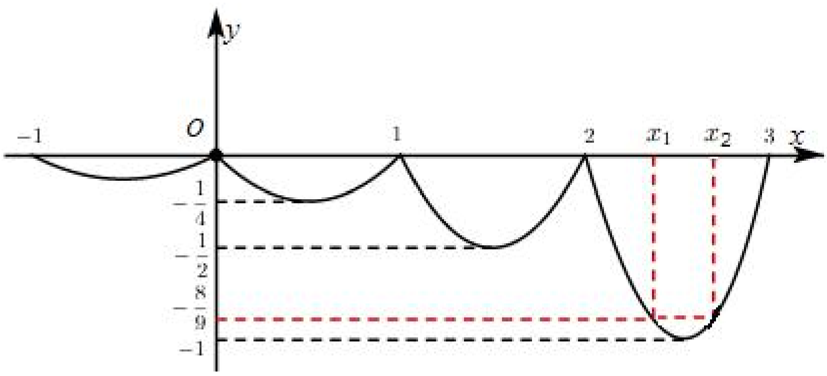
【解析】$\because f(x+1)=2f(x)$，$\therefore f(x)=2f(x-1)$．

$\because x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)\in[-\dfrac{1}{4},0]$；

$\therefore x\in(1,2]$ 时，$x-1\in(0,1]$，$f(x)=2f(x-1)=2(x-1)(x-2)\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right]$；

$\therefore x\in(2,3]$ 时，$x-1\in(1,2]$，$f(x)=2f(x-1)=4(x-2)(x-3)\in[-1,0]$，

如图：



当 $x\in(2,3]$ 时，由 $4(x-2)(x-3)=-\dfrac{8}{9}$ 解得 $x_1=\dfrac{7}{3}$，$x_2=\dfrac{8}{3}$，

若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geq-\dfrac{8}{9}$，则 $m\leq\dfrac{7}{3}$.

则 m 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{7}{3}\right]$.

故选 B.

【点拨】本题考查了函数与方程，二次函数.

例题 4 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x,x<0\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}(a+1)x^2+ax,x\geq0\end{cases}$. 若函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点，则

A．$a<-1$，$b<0$　　　　B．$a<-1$，$b>0$

C．$a>-1$，$b<0$　　　　D．$a>-1$，$b>0$

分析：当 $x<0$ 时，$y=f(x)-ax-b=x-ax-b=(1-a)x-b$ 最多有一个零点；当 $x\geq0$ 时，$y=f(x)-ax-b=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2-b$，利用导数研究函数的单调性，根据单调性画出函数的草图，从而结合题意可列不等式组求解.

【解析】当 $x<0$ 时，$y=f(x)-ax-b=x-ax-b=(1-a)x-b=0$，得 $x=\frac{b}{1-a}$，

则 $y=f(x)-ax-b$ 最多有一个零点；

当 $x\geq0$ 时，$y=f(x)-ax-b=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2+ax-ax-b=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+1)x^2-b$，

$y'=x^2-(a+1)x$，

当 $a+1\leq0$，即 $a\leq-1$ 时，$y'\geq0$，$y=f(x)-ax-b$ 在$[0，+\infty)$上单调递增，

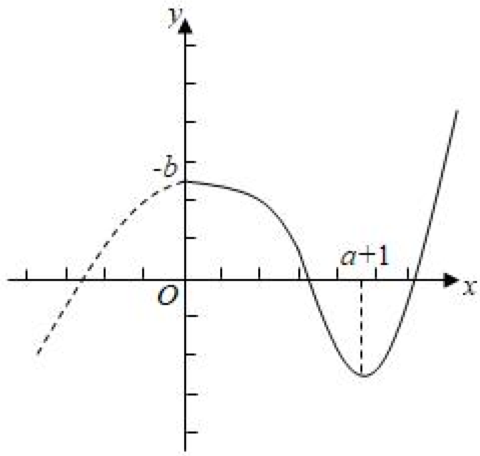
则 $y=f(x)-ax-b$ 最多有一个零点，不合题意；

当 $a+1>0$，即 $a>-1$ 时，令 $y'>0$ 得 $x\in(a+1，+\infty)$，此时函数单调递增，

令 $y'<0$ 得 $x\in[0, a+1)$，此时函数单调递减，则函数最多有 2 个零点.

根据题意，函数 $y=f(x)-ax-b$ 恰有 3 个零点⇔函数 $y=f(x)-ax-b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有一个零点，在 $[0, +\infty)$ 上有 2 个零点，

如图：



$\therefore \frac{b}{1-a}<0$ 且 $\begin{cases} -b>0 \\ \frac{1}{3}(a+1)^3-\frac{1}{2}(a+1)(a+1)^2-b<0 \end{cases}$，

解得 $b<0$，$1-a>0$，$b>-\frac{1}{6}(a+1)^3$，

则 $a>-1$，$b<0$.

故选 C.

【点拨】本题考查函数与方程，导数的应用.

本专题学法指导：

1. 函数的零点、方程的根、函数图象与 x 轴交点的横坐标之间是可以等价转化的..

2. 分段函数是重要的函数模型. 对于抽象函数，通常是抓住函数特性解题. 联系到具体的函数模型可以简便地找到解题思路，及解题突破口. 主要思想方法：数形结合，分类讨论，函数方程，化归等.

课后作业：（见文件 3）

拓展提升任务：（见文件 4）