

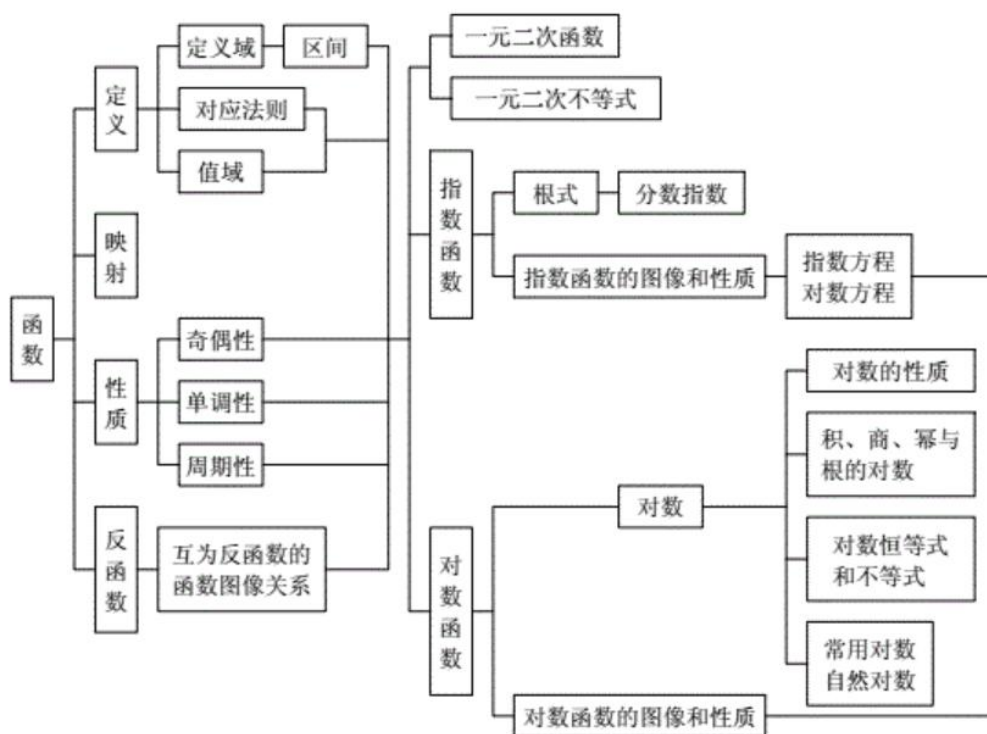
课题：函数的图象及其性质的应用(一)

学习目标

- 1.能够结合函数的图象及其性质解决相关问题;
- 2.综合运用函数的知识、思想和方法解决问题,变抽象为具体.

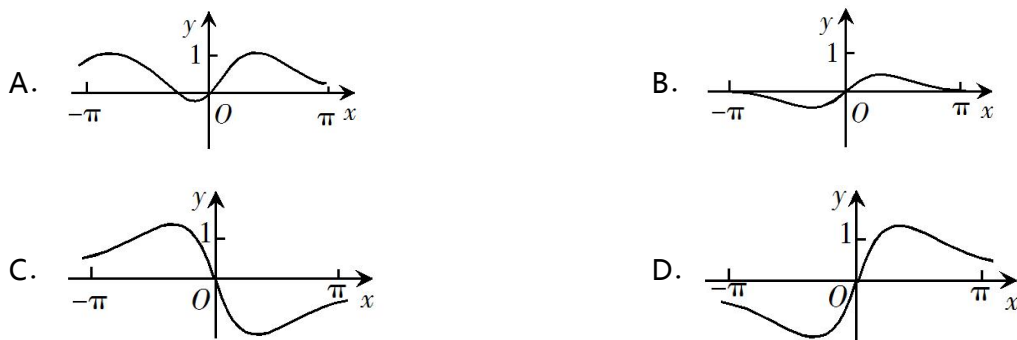
预备知识:

- 1.画函数图象的基本方法;
- 2.函数的基本性质.



典型例题

例题 1 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



分析: 本题可以先判断函数奇偶性, 再计算特殊点的函数值来确定选项.

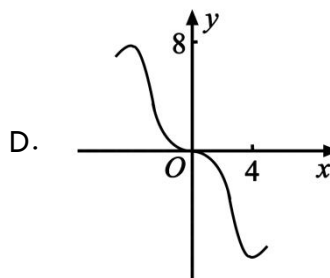
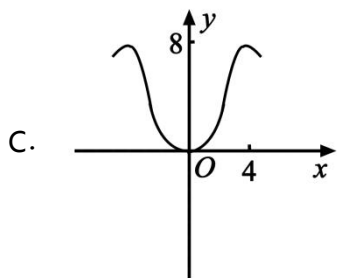
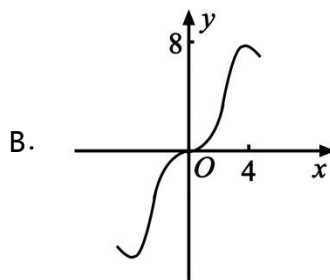
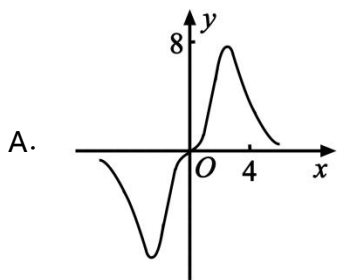
【解析】由 $f(-x) = \frac{\sin(-x) + (-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} = \frac{-\sin x - x}{\cos x + x^2} = -f(x)$ ，得 $f(x)$ 是奇函数，其图象关于原点对称。

又 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{4 + 2\pi}{\pi^2} > 1$ ， $f(\pi) = \frac{\pi}{-1 + \pi^2} > 0$ ，可知应为 D 选项中的图象。

故选 D.

【点拨】本题考查函数的性质与图象的识别，渗透了逻辑推理、直观想象和数学运算素养。采取性质法和赋值法，利用数形结合思想解题。

例题 2 函数 $y = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ 在 $[-6, 6]$ 的图像大致为



分析：本题通过判断函数的奇偶性，排除错误选项，通过计算特殊函数值，作出选择。

【解析】设 $y = f(x) = \frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}}$ ，则 $f(-x) = \frac{2(-x)^3}{2^{-x} + 2^x} = -\frac{2x^3}{2^x + 2^{-x}} = -f(x)$ ，所以 $f(x)$

是奇函数，图象关于原点成中心对称，排除选项 C.

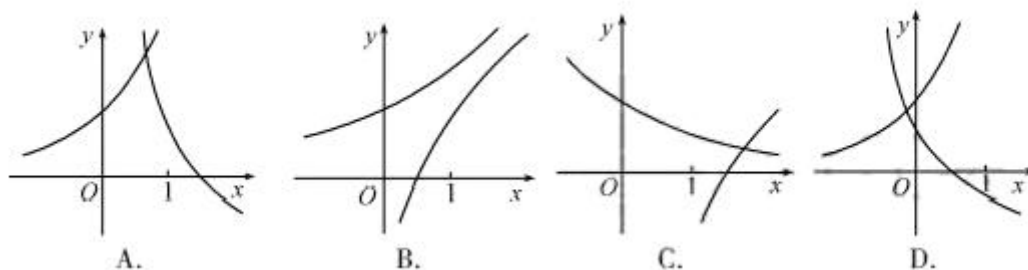
又 $f(4) = \frac{2 \times 4^3}{2^4 + 2^{-4}} > 0$ ，排除选项 D；

$f(6) = \frac{2 \times 6^3}{2^6 + 2^{-6}} \approx 7$ ，排除选项 A，

故选 B.

【点拨】本题注重基础知识、基本计算能力的考查.

例题 3 在同一直角坐标系中, 函数 $y = \frac{1}{a^x}$, $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象可能是



分析: 本题需要讨论 a 的取值范围, 结合指数函数、对数函数的图象和性质判断选项.

【解析】当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 的图象过定点 $(0,1)$ 且单调递减, 则函数 $y = \frac{1}{a^x}$ 的

图象过定点 $(0,1)$ 且单调递增, 函数 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ 的图象过定点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 且单调递减,

D 选项符合;

当 $a > 1$ 时, 函数 $y = a^x$ 的图象过定点 $(0,1)$ 且单调递增, 则函数 $y = \frac{1}{a^x}$ 的图象过定点

$(0,1)$ 且单调递减, 函数 $y = \log_a(x + \frac{1}{2})$ 的图象过定点 $(\frac{1}{2}, 0)$ 且单调递增, 各选项均不

符合.

综上, 选 D.

【点拨】易出现的错误: 一是指数函数、对数函数的图象和性质掌握不熟练, 导致判断失误; 二是不能通过讨论 a 的不同取值范围, 认识函数的单调性.

例题 4 已知函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(x+1)$ 为偶函数, 且对 $\forall x_1 < x_2 \leq 1$, 满足

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$. 若 $f(3) = 1$, 则不等式 $f(\log_2 x) < 1$ 的解集为

A. $(\frac{1}{2}, 8)$

B. $(1, 8)$

C. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (8, +\infty)$

D. $(-\infty, 1) \cup (8, +\infty)$

分析：本题要根据已知条件判断函数单调性，对称性画出草图，进而解题.

【解析】因为对 $\forall x_1 < x_2 \leq 1$ ，满足 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，所以 $y = f(x)$ 当 $x \leq 1$ 时，是

单调递减函数，又因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $y = f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以函

数 $y = f(x)$ 当 $x > 1$ 时，是单调递增函数，又因为 $f(3) = 1$ ，所以有 $f(-1) = 1$ ，

当 $\log_2 x \leq 1$ ，即当 $0 < x \leq 2$ 时，

$$f(\log_2 x) < 1 \Rightarrow f(\log_2 x) < f(-1) \Rightarrow \log_2 x > -1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}, \therefore \frac{1}{2} < x \leq 2;$$

当 $\log_2 x > 1$ ，即当 $x > 2$ 时，

$$f(\log_2 x) < 1 \Rightarrow f(\log_2 x) < f(3) \Rightarrow \log_2 x < 3 \Rightarrow x < 8, \therefore 2 < x < 8,$$

综上所述：不等式 $f(\log_2 x) < 1$ 的解集为 $\left(\frac{1}{2}, 8\right)$.

故选 A.

【点拨】本题考查了抽象函数的单调性、对称性、分类讨论思想.

对于 $y = f(x)$ 来说，设定义域为 I ， $D \subseteq I$ ， $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ ，

若 $(f(x_2) - f(x_1)) \cdot (x_2 - x_1) > 0$ ($\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$)，则 $y = f(x)$ 是 D 上的增函数；

若 $(f(x_2) - f(x_1)) \cdot (x_2 - x_1) < 0$ ($\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$)，则 $y = f(x)$ 是 D 上的减函数.

例题 5 已知 $f(x+2)$ 是偶函数， $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递减， $f(0) = 0$ ，则

$f(2-3x) > 0$ 的解集是

A. $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (2, +\infty)$

B. $(\frac{2}{3}, 2)$

C. $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

D. $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

分析：本题可以先根据函数的奇偶性得到函数在定义域上的单调性，再分类讨论求解不等式.

【解析】因为 $f(x+2)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

因此，由 $f(0)=0$ 得 $f(4)=0$ ，

又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增，

所以，当 $2-3x \geq 2$ 即 $x \leq 0$ 时，由 $f(2-3x) > 0$ 得 $f(2-3x) > f(4)$ ，所以 $2-3x > 4$ ，

解得 $x < -\frac{2}{3}$ ；

当 $2-3x < 2$ 即 $x > 0$ 时，由 $f(2-3x) > 0$ 得 $f(2-3x) > f(0)$ ，所以 $2-3x < 0$ ，解

得 $x > \frac{2}{3}$ ，

因此， $f(2-3x) > 0$ 的解集是 $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$.

故选 D.

【点拨】本题考查函数的奇偶性和单调性，不等式的求解，先根据函数的奇偶性得到函数在定义域上的单调性，从而分类讨论求解不等式.

例题 6 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，且 $y=f(x-1)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，若实数 a 满足 $f(\log_2 a) < f(2)$ ，则 a 的取值范围是

A. $(0, \frac{1}{4})$

B. $(\frac{1}{4}, +\infty)$

C. $(\frac{1}{4}, 4)$

D. $(4, +\infty)$

【答案】C

【解析】根据题意， $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，即函数 $f(x)$ 为偶函数，

又由函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

可得 $f(|\log_2 a|) < f(2)$ ，则 $|\log_2 a| < 2$ ，

即 $-2 < \log_2 a < 2$, 解得 $\frac{1}{4} < a < 4$,

即 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4}, 4\right)$.

故选 C.

【点拨】 本题考查函数的单调性与奇偶性的应用, 考查对数不等式的解法.

本专题学法指导:

1. 函数的图象既是函数性质的一个重要方面, 又能直观地反映函数的性质, 在解题过程中, 充分发挥图象的工具作用。

2. 初等函数: 幂函数, 指数函数, 对数函数. 在具体的对应法则下理解函数的通性, 掌握这些具体对应法则的性质. 函数单调性是函数性质中最活跃的性质, 它的运用主要体现在不等式方面, 如比较大小, 解抽象函数不等式等.

课后作业: (见文件 3)

拓展提升任务: (见文件 4)