椭圆中圆过定点问题

【学习目标】

1.能理解刻画圆过定点的最优代数表达式为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$；

2.掌握猜想定点位置的方法，灵活运用几何图形找出定点坐标.

【预备知识】

1. $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2+y_1y_2\,(P(0,0))$；

2.直径所对圆周角为 90° .

【典型例题】

例（2019.10 朝阳六校联考）

已知点E在椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）上，以$E$为圆心的圆与$x$轴相切于椭圆$C$的右焦点$F_2$，与$y$轴相交于$A$、$B$两点，且$\triangle ABE$是边长为2的正三角形.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）已知圆O：$x^2+y^2=\dfrac{18}{5}$，设圆O上任意一点P处的切线交椭圆C于M、N两点，试判断以MN为直径的圆是否过定点？若过定点，求出该定点坐标；若不过定点，请说明理由.

【思路分析】

1.以MN为直径的圆是否过定点

角度一：定点Q满足圆的方程

思路预设：运算量较大，变量涉及Q的坐标x_0,y_0以及圆方程中的三个参数，且为二次运算，不可取.

角度二：定点Q为圆上点，MN为直径，因此直径所对圆周角为90°，即$\angle MQN=90°$

思路预设：运算量比角度一小，变量涉及Q的坐标x_0,y_0和直线的两个参数，一次运算，可以尝试.

2.定点位置的锁定

角度一：直接设定点$Q(x_0,y_0)$，变量个数为四个

角度二：猜测定点Q在坐标轴上，即$Q(x_0,0)$或$Q(0,y_0)$

角度三：猜出定点Q的坐标，即$Q(0,0)$

思路预设：基本方法，通过画图找出定点位置，由特殊位置入手.

【解法辨析】

（Ⅰ） 由题意可得$EF_2\perp x$轴，则 $E(c,\dfrac{b^2}{a})$

因为$\triangle ABE$是边长为2的正三角形，所以$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times2=\sqrt{3}$， $\dfrac{b^2}{a}=2$，且$a^2-b^2=3$

解得$a=3$，$b=\sqrt{6}$

所以椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.

（Ⅱ）当过点 P 且与圆 O 相切的切线的斜率不存在时

可设切线方程为$x=\sqrt{\frac{18}{5}}$，可得$M(\sqrt{\frac{18}{5}},\sqrt{\frac{18}{5}})$，$N(\sqrt{\frac{18}{5}},-\sqrt{\frac{18}{5}})$

则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，所以$OM\perp ON$

此时以MN为直径的圆过原点

当过点 P 且与圆 O 相切的切线的斜率存在时

可设切线方程为$y=kx+m$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$

由直线和圆相切可得$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{\frac{18}{5}}$，即$5m^2=18(1+k^2)$

联立直线方程$y=kx+m$和椭圆方程$2x^2+3y^2=18$

可得$(2+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-18=0$，即有$\Delta>0$，

$x_1+x_2=-\frac{6km}{2+3k^2}$，　$x_1x_2=\frac{3m^2-18}{2+3k^2}$

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=(1+k^2)\cdot\frac{3m^2-18}{2+3k^2}+km(-\frac{6km}{2+3k^2})+m^2=0$

可得$OM\perp ON$

综上可得以MN为直径的圆过原点.

运算关键点：1.直线与椭圆方程联立：得到的必是一元二次方程，因此直接看系数来源即可，加快运算速度.

2.韦达定理涉及横坐标和纵坐标乘积运算，平时积累运算经验，掌握运算规律，加快运算速度.

3.目标是向量数量积为 0，因此只需要关注分子同分后的运算，进一步降低运算量.

【小结提升】

1.知识拓展：椭圆的基圆，设C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$），则称圆$O$：$x^2+y^2=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$为椭圆的基圆，设基圆的任一切线与椭圆交于$A,B$，则有$OA\perp OB$

分析：若知道基圆的基本性质，则可以根据直径所对圆周角为90°分析出原点O就是动圆上的定点.

2.圆过定点的两种情况：第一种，圆过 1 个定点，此时圆绕着定点转动；第二种，圆过 2 个定点，此时圆心运动轨迹为一条直线；圆至多过 2 个定点，因为不共线 3 点确定一个圆，动圆不可能有三个定点，直线与圆至多两个

交点，三点共线则不可能都在一个圆上.

【本专题学法指导】

1.猜测定点位置方法的根源：通过几何图形寻找定点位置，使用圆规做圆.

2.充分利用好椭圆关于坐标轴对称的几何性质，三个不同的圆即可锁定定点，两个不同的圆即可锁定定点所在直线.

3.从特殊位置入手，例如直线与坐标轴垂直的情况进行作图.