解析几何——点与圆的位置关系问题

【使用说明】

解析几何中的点与圆的位置关系问题在北京高考中还是很重要的，2019 年北京高考理科解析几何大题就考到了一个动圆过 y 轴上定点问题。我们有些同学对于点与圆的位置关系问题的转化还不是很擅长。本节我和同学们一起通过一题多变，来研究点与圆的位置关系中常见问题形式的转化，从而更好的理解解析几何的代数化方法。

【学法指导】

大家对于这部分题目可能会有一种难者不会，会者不难的感觉。希望通过我们这一专题的设计能够让大家都在原有基础上有所收获。原本会的同学们能够对问题认识的更加系统和深刻；原本不太会的同学们也可以有招去试着做做。同学们可以遵守一定之规尝试着去做做（积累一些重要的位置关系或者是数形之间架起一座桥的方法）。同学们可以通过教师的讲解、图形的展示、数学教学软件的帮助来理解和掌握本节课的教学内容。

【主要方法】

1、数形之间架起一座桥；

2、将点与圆的位置关系问题转化为向量的数量积问题；

【教学目标】

1.同学们通过自己独立尝试解决解析几何问题，感受几何问题代数化的过程.

2.同学们能够将点与圆的位置关系问题通过向量把几何问题代数化.

【教学重点】

1、椭圆中以两个点为直径的圆与点的位置关系的转化；

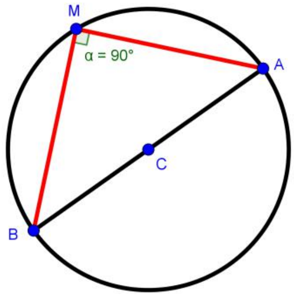
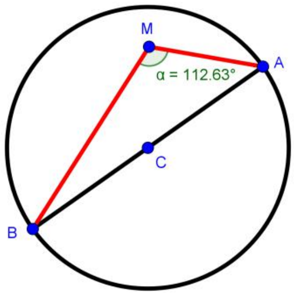
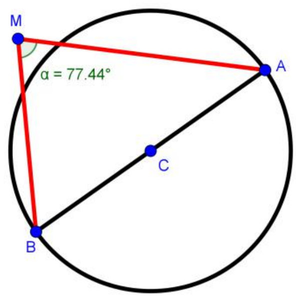
2、常见的点圆的位置关系问题的基本的转化方法。

【教学难点】

知识之间的牵引和综合应用能力的提升。

一、知识回顾

点 M 与以 AB 为直径的圆的位置关系：

位置关系	点 M 与以 AB 为直径的圆上	点 M 与以 AB 为直径的圆内	点 M 与以 AB 为直径的圆外
图示			
几何表达	$\left\|MC\right\|=\dfrac{\left\|AB\right\|}{2}$	$\left\|MC\right\|<\dfrac{\left\|AB\right\|}{2}$	$\left\|MC\right\|>\dfrac{\left\|AB\right\|}{2}$

	$\angle AMB=90^\circ$	$90^\circ<\angle AMB\le 180^\circ$	$0^\circ<\angle AMB<90^\circ$
	$\angle AMB$ 直角	$\angle AMB$ 钝角或平角	$\angle AMB$ 锐角
向量表达	$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$	$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}<0$	$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}>0$
$M(x_0,y_0)$ $A(x_1,y_1)$ $B(x_2,y_2)$ 坐标表达	$(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)=0$	$(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)<0$	$(x_1-x_0)(x_2-x_0)+(y_1-y_0)(y_2-y_0)>0$

二、学生独立完成

问题：椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，直线$l:y=k(x-1)$与椭圆交于A、B两点，AB中点为Q.

（1）若以AB为直径的圆经过坐标原点，求直线l方程.

（2）若$\angle AOB$为钝角，求k的范围.

（3）若$|OQ|>|AQ|$，求k的范围.

流程二、学生听老师的教学视频

解析：（1）方法一：因为AB中点为Q，则Q点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，联立方程组：

$\begin{cases}y=kx-k\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}\Rightarrow x^2+4\left(k^2x^2-2k^2x+k^2\right)-4=0\Rightarrow\left(4k^2+1\right)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，根据韦达定理有：$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1}$，

$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2\right)-2k=\dfrac{-2k}{4k^2+1}$；所以$Q\left(\dfrac{4k^2}{4k^2+1},\dfrac{-k}{4k^2+1}\right)$；

直径$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{4k^2+1}\right)^2-4\times\dfrac{4k^2-4}{4k^2+1}}=\dfrac{4\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3k^2+1}}{4k^2+1}$；

所以$\dfrac{|AB|}{2}=\dfrac{2\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3k^2+1}}{4k^2+1}$；因为以$AB$为直径的圆经过坐标原点，所以$|OQ|=\dfrac{|AB|}{2}$，即：

$\sqrt{\left(\frac{4k^2}{4k^2+1}\right)^2+\left(\frac{-k}{4k^2+1}\right)^2}=\frac{2\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3k^2+1}}{4k^2+1}$,

$\sqrt{\frac{16k^4+k^2}{\left(4k^2+1\right)^2}}=\frac{2\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{3k^2+1}}{4k^2+1}\Rightarrow 16k^4+k^2=4\left(1+k^2\right)\left(3k^2+1\right)\Rightarrow 4k^4-15k^2-4=0\Rightarrow k^2=4$ 或

$k^2=-\frac{1}{4}$(舍).进而有：$k=\pm 2$，所以直线 l 方程为 $y=2x-2$ 或 $l:y=-2x+2$.

方法二：设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，联立方程组：

$\begin{cases}y=kx-k\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}\Rightarrow x^2+4\left(k^2x^2-2k^2x+k^2\right)-4=0\Rightarrow\left(4k^2+1\right)x^2-8k^2x+4k^2-4=0$，根据韦达定理有：$x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-4}{4k^2+1}$；

$$y_1y_2=k^2(x_1-1)(x_2-1)=k^2\cdot\left[x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1\right]=k^2\cdot\left[\frac{4k^2-4}{4k^2+1}-\frac{8k^2}{4k^2+1}+1\right]=\frac{-3k^2}{4k^2+1}$$

若以 AB 为直径的圆经过坐标原点，则有 $OA\perp OB\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

因此，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=\frac{4k^2-4}{4k^2+1}+\frac{-3k^2}{4k^2+1}=\frac{k^2-4}{4k^2+1}=0$，解之得：$k=\pm 2$，所以直线 l 方程为 $y=2x-2$ 或 $l:y=-2x+2$

（2）若 $\angle AOB$ 为钝角，那么 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角 $\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle$ 是钝角，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle<0$，由(1)可知：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=\frac{k^2-4}{4k^2+1}$，令 $\frac{k^2-4}{4k^2+1}<0$，解之得：$-2<k<2$，所以 $k\in(-2,2)$.

（3）若 $\left|OQ\right|>\left|AQ\right|$，说明原点 O 是在以 Q 为圆心，$\left|AB\right|$ 为直径的圆外.易知，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角 $\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle$ 是锐角，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos\left\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right\rangle>0$，由（1）可知：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2=\frac{k^2-4}{4k^2+1}$，

令 $\frac{k^2-4}{4k^2+1}>0$，解之得：$k<-2$ 或 $k>2$，所以 $k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$