【分析】(1) 令 $f'(x) \leq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 令 $g(x) = f'(x)$

研究单调性求得 $g(x)$ 的最小值, 令其小于等于 0, 即可得出 k 的范围;

(2) 由 (1) 知当 $k = 2$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

可得 $x > 0$ 时, 则 $f(x) < f(0) = 0$, $f(-x) > f(0) = 0$

从而 $(1+x)e^{-2x} + x - 1 > (1-x)e^{2x} - x - 1$

化简后令 $t = 2x$, 构造新函数可证得结论.

【解】(1) 因 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

所以 $f'(x) = e^{kx}(k - kx - 1) - 1 \leq 0$ 恒成立.

令 $g(x) = f'(x) = e^{kx}(k - kx - 1) - 1$

则 $g'(x) = ke^{kx}(k - kx - 2)$

因 $k > 0$, 当 $x > \frac{k-2}{k}$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x < \frac{k-2}{k}$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{k-2}{k})$ 上单调递增, 在 $(\frac{k-2}{k}, +\infty)$ 上单调递减

所以 $g(x)_{\max} = g\left(\frac{k-2}{k}\right) = e^{k-2} - 1 \leq 0$, 即 $0 < k \leq 2$.

(2) 由 (1) 知当 $k = 2$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减

当 $x > 0$ 时, 则 $f(x) < f(0) = 0$

即 $(1-x)e^{2x} - x - 1 < 0$

又 $x > 0$ 时, $-x < 0$, 则 $f(-x) > f(0) = 0$

即 $(1+x)e^{-2x} + x - 1 > 0$

从而 $(1+x)e^{-2x} + x - 1 > (1-x)e^{2x} - x - 1$

即 $(1+x)e^{-2x} + (x-1)e^{2x} + 2x > 0$

也即 $(2+2x)e^{-2x} + (2x-2)e^{2x} + 4x > 0$

令 $t = 2x > 0$, 则 $(2+t)e^{-t} + (t-2)e^t + 2t > 0$

即 $x > 0$ 时, $(2-x)e^x - (2+x)e^{-x} < 2x$.