课后作业答案

解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$， $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{x^2}$ .

（Ⅰ）当 $a=2$ 时， $f'(1)=-1$， $f(1)=0$ .

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x+y-1=0$ .

（Ⅱ） $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{x^2}$， $x\in(0,+\infty)$ .

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{x^2}=0$，得 $x_1=2$， $x_2=\dfrac{1}{a}>2$ .

所以在区间 $(0,2)$ 和 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$ 上， $f'(x)>0$；

在区间 $(2,\dfrac{1}{a})$ 上， $f'(x)<0$ .

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,2)$ 和 $(\dfrac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是 $(2,\dfrac{1}{a})$ .

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时， $f'(x)=\dfrac{(x-2)^2}{2x^2}$ .

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$ .

当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，由 $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{x^2}=0$，得 $x_1=\dfrac{1}{a}$， $x_2=2>\dfrac{1}{a}$ .

所以在区间 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$ 上， $f'(x)>0$；

在区间 $(\dfrac{1}{a},2)$ 上， $f'(x)<0$ .

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,\dfrac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减区间是 $(\dfrac{1}{a},2)$ .

（Ⅲ）由题意存在 $x\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^2]$，使不等式 $ax-(2a+1)\ln x-\dfrac{2}{x}\geq -2a\ln x-\dfrac{2}{x}$ 成立，

即存在 $x\in[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^2]$， $a\geq\dfrac{\ln x}{x}$ 成立，

只需 $a$ 大于或等于 $\dfrac{\ln x}{x}$ 在区间 $[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^2]$ 上的最小值.

令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$， $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ .

在区间 $(\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e})$ 上， $h'(x)>0$， $h(x)$ 为增函数;

在区间 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 上， $h'(x)<0$， $h(x)$ 为减函数.

所以 $h(x)$ 在 $[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^2]$ 上的最小值为 $h(\dfrac{1}{\mathrm{e}})$ 与 $h(\mathrm{e}^2)$ 中的较小者.

$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=-\mathrm{e}$， $h(\mathrm{e}^2)=\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$，

所以 $h(x)$ 在 $[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\mathrm{e}^2]$ 上的最小值为 $h(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=-\mathrm{e}$ .

所以 $a\geq-\mathrm{e}$ . 所以 $a$ 的取值范围为 $[-\mathrm{e},+\infty)$ .