导数题目挖掘条件问题

【学习目标】

1.能进一步理解导数大题解题的基本思路;

2.具有沿用题干给出的函数解析式和前几问的条件的意识.

【预备知识】

1.若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减

2.若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是一条连续不断的曲线，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必存在 $x_0\in(a,b)$， $f(x_0)=0$

【典型例题】

例　函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a\ln x-b$ 在点 $P(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=0$.

（1）求实数 a， b 的值;（2）求 $f(x)$ 的单调区间;（3） $\forall x\geq 1$， $\ln \mathrm{e}x-k\mathrm{e}^x\leq 0$ 成立，求实数 k 的取值范围.

【思路分析与对应解法】

第一问解答：

（1） $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{a}{x}$，依题意得 $f(1)=0$， $f'(1)=0$，

则有 $\begin{cases}\mathrm{e}-b=0\\ \mathrm{e}-a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\mathrm{e}\\ b=\mathrm{e}\end{cases}$

第二问分析：

思路拆解：求单调区间重点在于判断一阶导函数的正负，正负判断不清用一阶导函数的零点辅助，零点不清用一阶导函数单调性辅助.

第二问解答：

（2）因为 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x-\mathrm{e}$，

$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}}{x}$， $f''(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{\mathrm{e}}{x^2}>0$

所以 $f'(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上为增函数

又因为 $f'(1)=0$

故当 $0<x<1$ 时， $f'(x)<f'(1)=0$；

当 $x>1$ 时， $f'(x)>f'(1)=0$

故函数 $f(x)$ 的减区间是 $(0,1)$，增区间是 $(1,+\infty)$

第三问方法一：不改变函数，直接分类讨论

（3）设 $g(x)=\ln \mathrm{e}x-k\mathrm{e}^x$，依题意，有： $\forall x\geq 1$， $g(x)\leq 0$ 恒成立，故 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-k\mathrm{e}^x$

当 $k\leq 0$ 时， $g'(x)>0$， $g(x)$ 单增，则 $g(x)>g(1)=1-k\mathrm{e}>0$，不合题意，舍

当 $k>0$ 时，$g''(x)=-\frac{1}{x^2}-k\mathrm{e}^x<0$，故 $g'(x)$ 单减，即 $g'(x)\le g'(1)=1-k\mathrm{e}$

若 $1-k\mathrm{e}\le 0$ 即 $k\ge\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $g'(x)\le 0$，故 $g(x)$ 单减，即 $g(x)\le g(1)=1-k\mathrm{e}\le 0$

若 $1-k\mathrm{e}>0$ 即 $0<k<\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $g(1)>0$，不合题意，舍

综上所述，k 的取值范围是 $[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$

第三问方法二：普通参变分离

思路拆解：分离的最终步骤因为自变量取值范围的限制防止了分离后使用洛必达法则或极限趋势的可能，因此参变分离可以考虑使用.

（3）由 $\ln \mathrm{e}x-k\mathrm{e}^x\le 0$ 得 $1+\ln x-k\mathrm{e}^x\le 0$，

所以 $k\ge\frac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 对 $x\ge 1$ 恒成立

设 $h(x)=\frac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$，只需 $k\ge h(x)_{\max}$

而 $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{\mathrm{e}^x}$

因为 $x\ge 1$，所以 $0<\frac{1}{x}\le 1,\frac{1}{x}-1\le 0,-\ln x\le 0$

即 $h'(x)\le 0$，也即 $h(x)$ 单减

所以 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$

故 k 的取值范围是 $[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$

第三问方法三：结合题目条件的参变分离

（3）由 $\ln \mathrm{e}x-k\mathrm{e}^x\le 0$ 得 $1+\ln x-k\mathrm{e}^x\le 0$，

所以 $k\ge\frac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$ 对 $x\ge 1$ 恒成立

设 $h(x)=\frac{1+\ln x}{\mathrm{e}^x}$，只需 $k\ge h(x)_{\max}$

由（2）知当 $x\ge 1$ 时，$f(x)\ge f(1)=0$

即 $\mathrm{e}^x\ge \mathrm{e}(\ln x+1)$ 对 $x\ge 1$ 恒成立.

即 $\frac{\ln x+1}{\mathrm{e}^x}\le\frac{1}{\mathrm{e}}$（当且仅当 $x=1$ 时取等号）

所以函数 $h(x)_{\max}=h(1)=\frac{1}{\mathrm{e}}$

故 k 的取值范围是 $[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$

第三问方法四：结合题目条件最大化延申题干给定函数

（3）依题意，有 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}\ln x-\mathrm{e}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增

且 $\forall x \geq 1$，$\ln ex - ke^x = 1 + \ln x - ke^x \leq 0$

则 $F(x) = 1 + \ln x - \frac{1}{e}e^x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，即 $F(x) \leq F(1) = 0$

所以当 $k = \frac{1}{e}$ 时，符合题意

当 $k > \frac{1}{e}$ 时，$1 + \ln x - ke^x < 1 + \ln x - \frac{1}{e}e^x \leq 0$，符合题意

当 $k < \frac{1}{e}$ 时，若 $x = 1$，则 $1 + \ln x - ke^x = 1 - ke > 0$，不合题意，舍

故 k 的取值范围是 $[\frac{1}{e}, +\infty)$

【小结提升】

1.逻辑出发点：原函数的单调性由导函数的正负确定；2.正负不确定，用导函数零点辅助

3.零点不确定，用导函数单调性辅助；4.导函数单调性用二阶导函数正负确定

5.导函数零点用单调性+取异号值（零点存在定理）得到；6.导函数正负用极值列表得到

7.边界值一旦定号，可以跳过零点辅助，直接得到正负

【本专题学法指导】

导数大题重点在于思路连贯和常用模式的统一，在平时练习首先要注重基本方法的落实，听课时重点听思路分析的来龙去脉.