

转化与化归思想 扩展提升任务 参考答案

1. 在平面直角坐标系中, 已知 $A(1, 0)$, $B(0, -1)$, P 是曲线 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上的一个动点, 则 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA}$ 的取值范围是_____.

(法一) (代数化, 坐标运算, 利用三角代换将目标转化为三角函数值域问题)

点 P 是半圆 $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ 上动点, 设 $P(\cos \theta, \sin \theta), (0 \leq \theta \leq \pi)$

$$\overrightarrow{BP} = (\cos \theta, \sin \theta + 1), \overrightarrow{BA} = (1, 1)$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} = \cos \theta + \sin \theta + 1 = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$$\because 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} \in [0, \sqrt{2} + 1]$$

(法二) (几何法, 利用投影的几何意义求取值范围)

$$\because \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BA}| \cos \angle PBA = \sqrt{2} |\overrightarrow{BP}| \cos \angle PBA$$

其中 $|\overrightarrow{BP}| \cos \angle PBA$ 表示向量 $\overrightarrow{BP}$ 在向量 $\overrightarrow{BA}$ 方向上的投影,

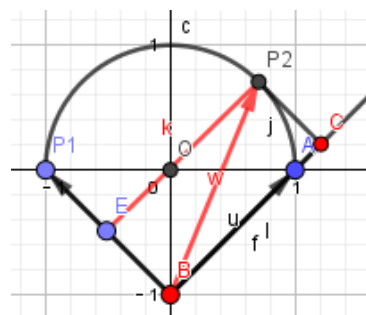
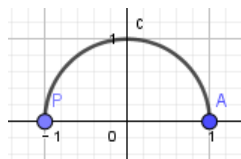
由于 $\angle PBA \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\cos \angle PBA \geq 0$,

由图可知, 显然当点 P 在 P_1 位置时投影为 0 是最小值,

当点 P 在 P_2 位置时投影有最大值 $(|\overrightarrow{BP}| \cos \angle PBA)_{\max} = BC = P_2O + OE = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

从而有 $(\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA})_{\max} = \sqrt{2} + 1$

综上, $\therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} \in [0, \sqrt{2} + 1]$.



2. 已知函数 $f(x) = 4x^2 - ax + 1$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点, 试求实数 a 的取值范围.

分析: 至少有一个零点的情况比较复杂, 而其反面为没有零点, 比较容易处理.

解: (法一) 当函数 $f(x) = 4x^2 - ax + 1$ 在 $(0, 1)$ 内没有零点时 $\Leftrightarrow 4x^2 - ax + 1 = 0$ 在

$(0, 1)$ 内没有实数根, 即在 $(0, 1)$ 内, $a \neq 4x + \frac{1}{x}$.

而当 $x \in (0, 1)$ 时, $4x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} = 4$, 得 $4x + \frac{1}{x} \in [4, +\infty)$.

要使 $a \neq 4x + \frac{1}{x}$, 必有 $a < 4$

故满足题设的实数的取值范围是 $[4, +\infty)$

(法二) 设 $f(x) = 4x^2 - ax + 1$, 对称轴为 $x = \frac{a}{8}$, 注意到 $f(0) = 1 > 0$, 故对称轴必在 y 轴的右侧.

(1) 当 $0 < \frac{a}{8} < 1$ 时, 即 $0 < a < 8$,

$$\text{有} \begin{cases} \Delta = a^2 - 16 \geq 0, \\ f(0) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -4 \text{ 或 } a \geq 4, \\ a \in R \end{cases} \Rightarrow a \leq -4 \text{ 或 } a \geq 4, \text{ 此时 } 4 \leq a \leq 8;$$

(2) 当 $\frac{a}{8} \geq 1$ 时, 有 $f(1) < 0 \Rightarrow 5 - a < 0 \Rightarrow a > 5$, 此时有 $a \geq 8$.

综合 (1) (2) 得实数的取值范围是 $[4, +\infty)$

点评: 运用法二直接求解时, 要有较强的数形结合能力, 分类讨论能力和较强的洞察力 (注意到 $f(0) = 1 > 0$), 有一定的难度; 若转为先考虑它的反面情形 (法一), 则解题目标与思路会变得更集中与明确. “正难则反” 有时会给我们的解题带来意想不到的妙处.

3. 已知函数 $f(x) = \frac{ax - x^2}{e^x}$.

(II) 当 $a > 0$ 时, 求证: $f(x) > -\frac{2}{e}$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 成立.

分析: 不等式证明问题转化为函数最值问题.

(II) 法一 (直接转化为求 $f(x)$ 最小值):

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{x^2 - (a+2)x + a}{e^x}, \text{ 令 } f'(x) = \frac{x^2 - (a+2)x + a}{e^x} = 0$$

$$\text{得 } x_1 = \frac{a+2 - \sqrt{a^2+4}}{2}, x_2 = \frac{a+2 + \sqrt{a^2+4}}{2}$$

当 $a > 0$ 时, x , $f'(x)$, $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的变化情况如下表:

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(0), f(x_2)$ 中较小的值,

而 $f(0) = 0 > -\frac{2}{e}$, 所以只需要证明 $f(x_2) > -\frac{2}{e}$

因为 $x_2^2 - (a+2)x_2 + a = 0$ ，所以 $f(x_2) = \frac{ax_2 - x_2^2}{e^{x_2}} = \frac{a - 2x_2}{e^{x_2}}$

设 $F(x) = \frac{a-2x}{e^x}$ ，其中 $x > 0$ ，所以 $F'(x) = \frac{-2 - (a-2x)}{e^x} = \frac{2x - (a+2)}{e^x}$

令 $F'(x) = 0$ ，得 $x_3 = \frac{a+2}{2}$ ，

当 $a > 0$ 时， x ， $F'(x)$ ， $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, x_3)$	x_3	$(x_3, +\infty)$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $F(\frac{a+2}{2}) = \frac{-2}{e^{\frac{1+a}{2}}}$ ，而 $F(\frac{a+2}{2}) = \frac{-2}{e^{\frac{1+a}{2}}} > \frac{-2}{e}$

注意到 $x_2 = \frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2} > 0$ ，所以 $f(x_2) = F(x_2) > -\frac{2}{e}$ ，问题得证

法二：（观察到 $e^x > 0$ ，先去分母，再构造差函数，证明差函数最小值大于 0）

因为“对任意的 $x > 0$ ， $\frac{ax - x^2}{e^x} > -\frac{2}{e}$ ”等价于“对任意的 $x > 0$ ， $\frac{ax - x^2}{e^x} + \frac{2}{e} > 0$ ”

即“ $x > 0$ ， $\frac{2e^x + e(ax - x^2)}{e^{x+1}} > 0$ ”，故只需证“ $x > 0$ ， $2e^x + e(ax - x^2) > 0$ ”

设 $g(x) = 2e^x + e(ax - x^2)$ ，所以 $g'(x) = 2e^x + e(a - 2x)$

设 $h(x) = g'(x)$ ， $h'(x) = 2e^x - 2e$

令 $F'(x) = 0$ ，得 $x_3 = 1$

当 $a > 0$ 时， x ， $h'(x)$ ， $h(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	—	0	+
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为 $h(1)$ ，而 $h(1) = 2e + e(a - 2) = ea > 0$

所以 $x > 0$ 时, $g'(x) = 2e^x + e(a-2x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

所以 $g(x) > g(0)$

而 $g(0) = 2 > 0$, 所以 $g(x) > 0$, 问题得证

法三: (在法一的基础上, 对函数最小值进行放缩后进行证明)

“对任意的 $x > 0$, $f(x) > -\frac{2}{e}$ ” 等价于 “ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值大于 $-\frac{2}{e}$ ”

因为 $f'(x) = \frac{x^2 - (a+2)x + a}{e^x}$, 令 $f'(x) = 0$

$$\text{得 } x_1 = \frac{a+2-\sqrt{a^2+4}}{2}, x_2 = \frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

当 $a > 0$ 时, x , $f'(x)$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的变化情况如下表:

x	$(0, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $f(0), f(x_2)$ 中较小的值,

而 $f(0) = 0 > -\frac{2}{e}$, 所以只需要证明 $f(x_2) > -\frac{2}{e}$

因为 $x_2^2 - (a+2)x_2 + a = 0$, 所以 $f(x_2) = \frac{ax_2 - x_2^2}{e^{x_2}} = \frac{a - 2x_2}{e^{x_2}} > \frac{-2x_2}{e^{x_2}}$

注意到 $x_2 = \frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2}$ 和 $a > 0$, 所以 $x_2 = \frac{a+2+\sqrt{a^2+4}}{2} > 2$

设 $F(x) = \frac{-2x}{e^x}$, 其中 $x > 2$

所以 $F'(x) = \frac{-2(1-x)}{e^x} = \frac{2(x-1)}{e^x}$

当 $x > 2$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 单调递增, 所以 $F(x) > F(2) = -\frac{4}{e^2}$

而 $-\frac{4}{e^2} - (-\frac{2}{e}) = \frac{2e-4}{e^2} > 0$

所以 $f(x_2) > F(x_2) > -\frac{2}{e}$, 问题得证

法四: (先放缩, 放缩后构造新函数, 再求新函数最值.)

因为 $a > 0$ ，所以当 $x > 0$ 时， $f(x) = \frac{ax - x^2}{e^x} > \frac{-x^2}{e^x}$

设 $F(x) = \frac{-x^2}{e^x}$ ，其中 $x > 0$

所以 $F'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x}$

所以 x ， $F'(x)$ ， $F(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以 $F(x)$ 在 $x = 2$ 时取得最小值 $F(2) = -\frac{4}{e^2}$ ，而 $-\frac{4}{e^2} - (-\frac{2}{e}) = \frac{2e-4}{e^2} > 0$

所以 $x > 0$ 时， $F(x) > -\frac{2}{e}$

所以 $f(x) > F(x) > -\frac{2}{e}$