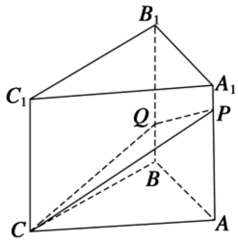
转化与化归思想 作业参考答案

1. 在报名的3名男教师和6名女教师中，选取5人参加义务献血，要求男、女教师都有，则不同的选取方式的种数为_________（结果用数值表示）.

解析：由正难则反原则，去掉选 5 名女教师情况即可：$C_9^5-C_6^5=126-6=120.$



2. 如图，在棱柱的侧棱 A_1A 和 B_1B 上各有一动点 P,Q 满足 $A_1P=BQ$，过 P,Q,C 三点的截面把棱柱分成两部分，则其体积之比为（　　）

（A） 3:1　　　（B）2:1　　　（C）4:1　　　（D）$\sqrt{3}:1$

分析：特殊与一般的转化. 将点 P,Q 置于特殊位置：$P\to A_1,Q\to B$，此时仍满足条件 $A_1P=BQ(=0)$，则有 $V_{C-AA_1B}=V_{A_1-ABC}=\dfrac{V_{ABC-A_1B_1C_1}}{3}$，故选（B）.

3. 已知函数 $f(x)=|x-2|-kx+1$ 恰有两个零点，则实数 k 的取值范围是（　　）

（A）$(0,\dfrac{1}{2})$　　　（B）$(\dfrac{1}{2},1)$　　　（C）$(1,2)$　　　（D）$(2,+\infty)$

【解答】函数 $f(x)=|x-2|-kx+1$ 恰有两个零点，等价于方程 $|x-2|=kx-1$ 恰有两不同的解，则函数 $y=|x-2|$ 与 $y=kx-1$ 的图象有两个交点，$y=kx-1$ 的图象为过点（$0,-1$），且斜率为 k 的直线，根据数形结合，不难知实数 k 的取值范围是 $(\dfrac{1}{2},1)$，选（B）.

4. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3ax\,(a\in\mathbf{R})$.

问：在直线 $x=1$ 上是否存在点 P，使得过点 P 至少有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切？若存在，求出 P 点坐标；若不存在，说明理由.

解：不妨设在直线 $x=1$ 上存在一点 $P(1,b)$，

设过点 P 与 $y=f(x)$ 相切的直线为 l，切点为 (x_0,y_0)，

则切线 l 方程为 $y-\dfrac{1}{3}x_0^3+x_0^2-3ax_0=(x_0^2-2x_0+3a)(x-x_0)$.

又直线 l 过 $P(1,b)$，有 $b-\dfrac{1}{3}x_0^3+x_0^2-3ax_0=(x_0^2-2x_0+3a)(1-x_0)$，

即 $\dfrac{2}{3}x_0^3-2x_0^2+2x_0-3a+b=0$.

设 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+2x-3a+b$，

$g'(x)=2x^2-4x+2=2(x-1)^2\geq 0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)=0$ 至多有一个解.

过点 P 与 $y=f(x)$ 相切的直线至多有一条.

故在直线 $x=1$ 上不存在点 P，使得过 P 至少有两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切.