转化与化归思想

【学习目标】

1. 通过对具体问题的分析，理解并掌握转化化归思想的常见应用：正与反的转化，特殊与一般的转化，几何与代数的转化，函数、方程、不等式之间的转化等；

2. 理解转化与化归思想的实质就是实现新问题向老问题、复杂问题向简单问题、未知问题向已知问题的转化，体会转化与化归的一般原则：熟悉化原则、简单化原则、直观化原则、正难则反原则；

3. 通过对具体问题的分析、转化、化归，求解，体会转化与化归思想是数学思想的核心，提升分析问题、解决问题的能力.

【教学重点】

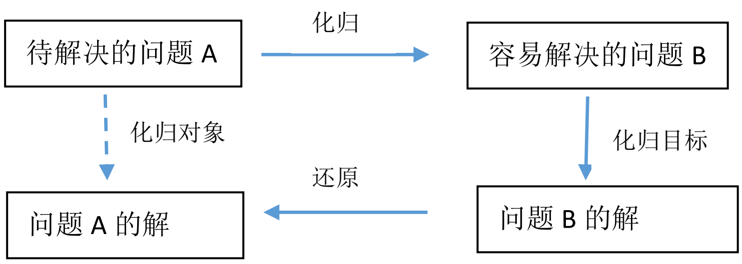
掌握转化与化归思想的常见应用：正与反的转化，特殊与一般的转化，几何与代数的转化，函数、方程、不等式之间的转化等.

【教学难点】

转化与化归思想的灵活运用

【引导语】

今天我们对数学思想方法中的“转化与化归思想”专题进行复习. 转化与化归思想的基本内涵是：人们在解决数学问题时，常常将待解决的数学问题 A，通过某种转化手段，化归为另一问题 B，而问题 B 是相对较容易解决的或已经有固定解决模式的问题，且通过问题 B 的解决可以得到原问题 A 的解答. 用框图可直观地表示为：



数学问题的解决，总离不开转化与化归. 常见的解题应用有：正与反的转化，特殊与一般的转化，几何与代数的转化，函数与方程、不等式的转化等. 化归与转化的思想是解决数学问题的根本思想，解题的过程实际上就是一步步转化的过程.

首先我们来看如下热身问题：

【课前热身】

1. 某选手射击 1 次击中目标的概率是 0.9，且他各次射击是否击中目标是相互独立的.若该选手连续射击 4 次，则他至少击中目标 1 次的概率为__________________.

分析：至少击中目标一次的情况包括恰 1 次、恰 2 次、恰 3 次、恰 4 次击中目标共四种情况，可转化为其对立事件：一次都未击中，来求解.

解：设“选手至少击中目标 1 次”为事件 A，则“一次都未击中”为事件 $\overline{A}$

显然 $P(\overline{A})=C_4^4 0.1^4=0.1^4$，

至少射击击中目标 1 次的概率为 $P(A)=1-P(\overline{A})=0.9999$.

设计意图：体会**正与反的转化**，从集合的角度来看就是“补集”的思想.

探究提高：否定性命题，常利用正反的相互转化，先从正面求解，再取正面答案的补集即可．一般地，题目若出现多种成立的情形，而不成立的情形相对很少，则从反面考虑较简单，因此，间接法多用于含有“至多”、“至少”及否定性命题情形的问题中．如课后巩固性作业 1.

2. 直线 l 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 $F(1,0)$，且与 C 交于 A，B 两点，则 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}$ 的值为____________________.

解析：根据题意，这个问题的结果应该是一个定值，而一般情况的运算所需时间较多，因此我们可以利用特殊位置来进行计算.

取过焦点 $F(1,0)$ 且垂直于 x 轴的直线，则有 $|AF|=|BF|=p=2$，

$$\therefore \frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

设计意图：体会**特殊与一般的转化**，对于某些选择题、填空题，如果结论唯一或题目提供的信息暗示答案是一个定值时，可以把所求值利用特殊值求解.在解答题中也可以用这种方法来探究解题的突破口，寻求解题的方法.

探究提高：一般问题特殊化，可以使问题处理变得直接、简单．特殊问题一般化，可以使我们从宏观整体的高度把握问题的一般规律，从而达到成批的处理问题的效果．请尝试解决课后巩固性作业 2.

接下来，我们看典型例题.

典型例题：

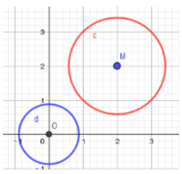
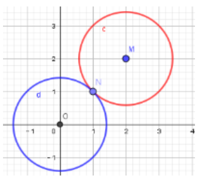
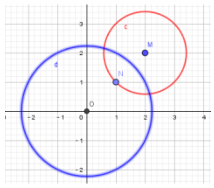
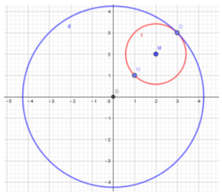
例 1. 已知点 $A(-a,0),B(a,0)\,(a>0)$，若圆 $M:(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 上存在点 C，使得 $\angle ACB=90°$，则 a 的最大值为_________.

分析：思路一：$\angle ACB=90^\circ \Leftrightarrow$ 点 C 在以 AB 为直径的圆上，

其中以 AB 为直径的圆方程是 $x^2+y^2=a^2$.

又点 C 在圆 $M:(x-2)^2+(y-2)^2=2$ 上，所以点 C 是两圆公共点，

则两圆相切或相交.

几何：由图可知，当两圆内切时，显然 a 的最大值为 $3\sqrt{2}$.

代数： $a-\sqrt{2}\le|OM|\le a+\sqrt{2}$，从而 $a\le|OM|+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

思路二：$\angle ACB=90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ 从而转化为坐标运算.

因为点C在圆$M:(x-2)^2+(y-2)^2=2$上，

所以可利用三角代换，设点$C(2+\sqrt{2}\cos\theta,2+\sqrt{2}\sin\theta),\theta\in R$，

$\overrightarrow{CA}=(-a-2-\sqrt{2}\cos\theta,-2-\sqrt{2}\sin\theta),\overrightarrow{CB}=(a-2-\sqrt{2}\cos\theta,-2-\sqrt{2}\sin\theta)$，

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(2+\sqrt{2}\cos\theta)^2-a^2+(2+\sqrt{2}\sin\theta)^2$

$==10+4\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)-a^2=0$.

所以$a^2=10+4\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)=10+8\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\le 18$.

所以$a_{\max}=3\sqrt{2}$.

设计意图：“一题多解”实际上是通过不同的化归途径与转化思想实现同一目标的过程．法（一）将条件转化为我们所熟悉的两圆位置关系，又分别从几何与代数两个角度进行了求解；法（二）将条件转化为坐标运算，利用三角代换进而将目标问题转化为三角函数的最值问题，都体现了熟悉化原则以及几何与代数的转化.

探究提高：数学中的函数问题、解析几何问题、向量问题、立体几何问题等常常借助几何与代数转化的途径达到解题的目的.

例 2．已知函数$f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

（Ⅱ）当$x\in[-2,4]$时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

解：（Ⅱ）分析：**要证：**$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

只需证：$-6\leqslant f(x)-x\leqslant 0$.

正确转化：令$g(x)=f(x)-x$，$x\in[-2,4]$.

只需求$g(x)$在相应范围内的最大、最小值即可．从而将不等式证明问题转化为求函数最值问题，进而转化为函数单调性问题.

由$g(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2$得$g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x$.

令$g'(x)=0$得$x=0$或$x=\dfrac{8}{3}$.

$g'(x),g(x)$的情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3},4)$	4
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以$g(x)$的最小值为-6，最大值为0.

故 $-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，即 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$.

设计意图：体会**函数与不等式的转化.**函数与方程、不等式联系密切，解决不等式的证明问题，如恒成立、存在性问题，常常可以转化为求函数最值问题.函数与方程、不等式联系密切，解决不等式的证明问题，如恒成立、存在性问题，常常可以通过构造函数转化为求函数最值问题. 构造函数时要关注函数与不等式的结构特点，例如遇到分式函数，分母的符号确定时，也常常可以去分母之后再构造函数.

接下来，我们看例 3，仍然重点研究第（Ⅱ）问：

例3.　已知函数 $f(x)=2x^3-3x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值；

（Ⅱ）若过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，求 t 的取值范围.

解：（Ⅰ）由 $f(x)=2x^3-3x$ 得 $f'(x)=6x^2-3$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $f(-2)=-10$， $f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$， $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$， $f(1)=-1$，

所以 $f(x)$ 在区间 $[-2,1]$ 上的最大值为 $f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$.

（Ⅱ）**如何对已知条件进行转化呢？**

我们先一起来分析一下现有条件：如何将**相切**这个**几何问题代数化**呢？

设过点 $P(1,t)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0,y_0)，

则 $y_0=2x_0^3-3x_0$，且切线斜率为 $k=6x_0^2-3$，

所以切线方程为 $y-y_0=(6x_0^2-3)(x-x_0)$，

因此 $t-y_0=(6x_0^2-3)(1-x_0)$.

整理得 $4x_0^3-6x_0^2+t+3=0$.（*）

设 $g(x)=4x^3-6x^2+t+3$，

则“过点 $P(1,t)$ 存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切” .

等价于“方程（*）有三个不等实根” .

等价于“函数$g(x)$有3个不同零点”.

$g'(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$.

$g(x)$与$g'(x)$的情况如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	$t+3$	↘	$t+1$	↗

所以，$g(0)=t+3$是$g(x)$的极大值，$g(1)=t+1$是$g(x)$的极小值.

当$g(0)=t+3\leqslant 0$，即$t\leqslant -3$时，此时$g(x)$在区间$(-\infty,1]$和$(1,+\infty)$上分别至多有1个零点，所以$g(x)$至多有2个零点.

当$g(1)=t+1\geqslant 0$，即$t\geqslant -1$时，此时$g(x)$在区间$(-\infty,0)$和$[0,+\infty)$上分别至多有1个零点，所以$g(x)$至多有2个零点.

当$g(0)>0$且$g(1)<0$，即$-3<t<-1$时，因为$g(-1)=t-7<0$，$g(2)=t+11>0$，所以$g(x)$分别在区间$[-1,0)$，$[0,1)$和$[1,2)$上恰有1个零点. 由于$g(x)$在区间$(-\infty,0)$和$(1,+\infty)$上单调，所以$g(x)$分别在区间$(-\infty,0)$和$[1,+\infty)$上恰有1个零点.

综上可知，当过点$P(1,t)$存在3条直线与曲线$y=f(x)$相切时，t的取值范围是$(-3,-1)$.

设计意图：体会**函数、方程、不等式之间的转化.** 解决方程、不等式的问题需要函数帮助，解决函数的问题需要方程、不等式的帮助，因此借助于函数、方程、不等式进行转化与化归可以将问题化繁为简，一般可将一般可将方程的根与函数的零点进行转化，将不等关系与函数最值(值域)进行转化，从而求出参变量的范围.

【小结提升】

本节课我们通过两个热身练习和三个典型例题的探究和学习，体会了转化与化归思想在解题中的常见应用，主要有：正与反的转化，特殊与一般的转化，几何与代数的转化，函数、方程、不等式之间的转化等.

掌握化归与转化的思想方法对学好高中数学是非常有帮助的，它可以帮助我们寻找到一些简单的方法来解决一些较为复杂的题目。在应用时应遵循以下原则：

1. 熟悉化原则，将陌生的问题转化为熟悉的问题，以利于我们运用熟悉的知识、经验和问题来求解；

2. 简单化原则，将复杂的问题转化为简单的问题，通过对简单问题的解决，达到解决复杂问题的目的，或获得某种解题的启示和依据.

3. 直观化原则，将抽象的问题转化为比较直观的问题来解决.

4. 正难则反原则，当问题正面讨论遇到困难时，应想到考虑问题的反面，设法从问题的反面去探求，使问题获得解决，或证明问题的可能性.

【学法指导】

在应用转化与化归的思想方法解决问题时，应注意它的三个基本要素：

1. 转化什么，即转化的对象；
2. 转化到何处，即转化的目标；
3. 如何进行转化，即转化的方法.

以上这些都需要我们具备扎实地基础知识，掌握一些解题的基本技能和基本方法，落实基本题型，并且要具备机敏细微的观察、丰富的比较和联想能力，平精神要积极主动有意识地发现各知识点之间的本质联系，在复习过程中，要善于反思解题过程，整合解题思想，逐步形成良好的思维习惯.