指数函数与对数函数的突破要点——教学活动方案

学习内容分析：

指数函数和对数函数是重要的基本初等函数，也是重要的函数模型。在前面学习了指对函数概念、图象和性质，以及初步应用的基础上，本节课通过问题导学的方式，引导学生深入理解指对函数的概念与性质，进一步应用指对函数的图象及基本变换解决函数问题。同时，本节内容中还蕴含了分类讨论、数形结合、具体与抽象等数学思想，深刻理解和灵活运用以上思想方法，不仅会给解题带来方便，也是把握高中数学本质的体现。希望同学们能认真体会，加强训练，争取早日掌握。

学习目标：

1.通过问题导学，学生在思考与解决问题过程中，深入理解指对函数的概念、图象和性质，进一步掌握利用指对函数及其图象变换解决函数问题的方法；

2.通过问题解决，学生进一步体会指对函数中蕴含的分类讨论、数形结合、具体与抽象等数学思想方法，加深对高中数学本质的理解；

3.通过对指对函数几种类型问题的解决，学生体会和发展直观想象、逻辑推理、数学抽象等核心素养，提高数学解题能力。

学习任务

要点一：指数与对数函数的性质

问题 1：已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x+\frac{3}{4}, & x\geq 2,\\ \log_2 x, & 0<x<2.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-k$ 有两个不同的零点，则实数 k 的取值范围是____________.

分析：本题以分段函数为载体考查函数的零点及指对函数的性质。

解：根据函数零点定义：

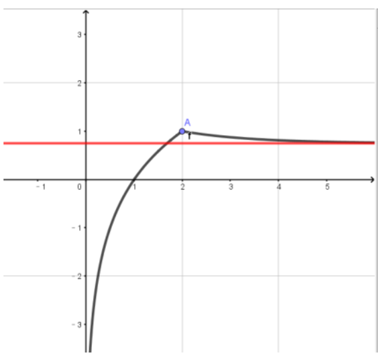
函数 $g(x)=f(x)-k$ 有两个不同的零点

$\Updownarrow$

方程 $f(x)=k$ 有两个不同的实根

$\Updownarrow$

函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=k$ 有两个不同的交点。



画出函数的图象，观察图象易得 $k\in\left(\frac{3}{4},1\right)$.

总结：

1. 本题容易忽略 $(\frac{1}{2})^x > 0$，从而得到 $k \in (0,1)$ 的错解；

2. 准确把握指对函数的性质是解题的关键。比如对底数的要求，指数函数恒大于 0，对数函数的真数恒大于零等，另外还要善于借助函数图象处理函数问题。

要点二：指对函数图象及变换

问题 2：函数 $f(x)$ 的图象向上平移1个单位长度，再关于 y 轴做对称变换，所得图象与曲线 $y = \mathrm{e}^x$ 与直线 $y = x$ 对称，则 $f(x) =$ ___________.

分析：本题考查指数和对数函数图象及变换

解：首先分析变换过程：$f(x)$ 上移 1 个单位 $\rightarrow$ 关于 y 轴对称 $\rightarrow$ 关于直线 $y = x$ 轴对称 $\rightarrow$ 曲线 $y = \mathrm{e}^x$

为了得到函数 $f(x)$ 解析式只需进行如下变换：

$y = \mathrm{e}^x$ 关于直线 $y = x$ 轴对称 $\rightarrow$ 关于 y 轴对称 $\rightarrow$ 下移 1 个单位 $\rightarrow$ 函数 $f(x)$

不难得到函数 $f(x) = \ln(-x) - 1$

总结：

$y = a^x$ 与 $y = (\frac{1}{a})^x$ 关于 y 轴对称； $y = \log_a x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 关于 x 轴对称；

$y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 关于 $y = x$ 对称；多次函数图象变换要逐步依次进行。

要点三：分类讨论

问题 3：已知 $f\left(x\right) = a^{x-1} + \log_a x\left(a > 0, a \neq 1\right)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上的最大值与最小值之和为 a，求 a 的值.

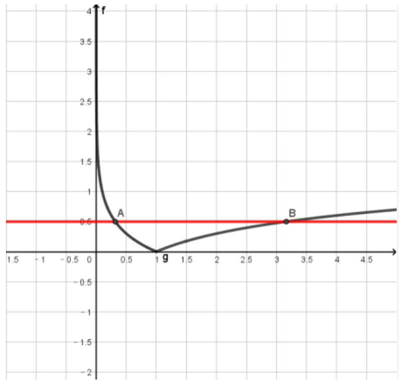
分析：本题考查指数和对数函数概念和性质，渗透分类讨论思想。

解：当 $0 < a < 1$ 时 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,2\right]$ 单调递减，当 $a > 1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left[1,2\right]$ 单调递增，所以函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上是单调函数.

$\therefore f\left(1\right) + f\left(2\right) = a, \therefore 1 + a + \log_a 2 = a, \therefore a = \frac{1}{2}.$

总结：
1. 要深入理解指数和对数函数的概念和性质，比如为什么要求底数$a>0$且$a\neq 1$？为什么要将指数函数和对数函数分成$0<a<1$和$a>1$两类？
2. 分类讨论是研究和解决含参数学问题的常用方法，用好分类讨论方法的关键是要具备讨论意识和掌握讨论标准。分类讨论是北京高考重点考查的思想方法，从高考答题情况来看，在运用分类讨论解题方面还有很大的提升空间。希望同学们好好体会，认真训练，早日掌握分类讨论的方法。

要点四：数形结合



问题 4：已知 $f(x)=|\lg x|$，若 $0<a<b$，且 $f(a)=f(b)$，求 $a+2b$ 的取值范围.
分析：本题以对数函数及其翻折变换为载体，考查对数运算和求函数值域。

解：作 $f(x)=|\lg x|$ 的图象.

观察图象易得 $0<a<1$，$1<b$，由 $f(a)=f(b)$，得 $-\lg a=\lg b$，即 $b=\dfrac{1}{a}$.

于是 $g(a)=a+2b=a+\dfrac{2}{a}$，其为区间 $(0,1)$ 上的对勾函数. 可证 $g(a)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $g(a)>g(1)=3$，又当 $a\to+0$ 时，$g(a)\to+\infty$，故所求为 $(3,+\infty)$.

总结：

1. 本题容易有如下错解：$g(a)=a+\dfrac{2}{a}\geq 2\sqrt{2}$，所以取值范围为 $\left[2\sqrt{2},+\infty\right)$. 错因在于该题有隐含条件 $0<a<1$，a 与 $\dfrac{2}{a}$ 不具备相等条件，所以不能用基本不等式求最值。
2. 数学是研究数与形关系的学科，数形结合是我们研究和解决数学问题的一种常用的方法。画出函数图象，将函数问题直观化是数形结合方法在函数问题中的具体体现，我们要充分发挥函数图象的直观化功能，准确把握函数问题中的解题信息。

要点五：具体与抽象

问题 5：对于 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），有如下结论：

① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$；② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$；

③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；　④ $f(\dfrac{x_1+x_2}{2})<\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

当 $f(x)=\lg x$ 时，上述结论中正确结论的序号是______________.

分析：本题以抽象函数为载体，考查对数运算和对数函数的性质。

解：因为 $f(x)=\lg x$

$\lg(x_1+x_2)\neq \lg x_1 \lg x_2$， ①不对；

$\lg(x_1\cdot x_2)=\lg x_1+\lg x_2$， ②对；

$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0 \Leftrightarrow f(x)$ 单调递增， ③对；

$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\dfrac{\lg x_1+\lg x_2}{2}=\lg\sqrt{x_1\cdot x_2}<\lg\dfrac{x_1+x_2}{2}=f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$，④不对。

综上，上述结论中正确结论的序号是②、③。

总结：

1. 抽象函数问题往往转化为具体函数加以验证，或者根据函数性质构造具体函数来解决；

2. 指数函数 $f\left(x\right)=a^x$，对于定义域中任意的 x_1， x_2，都有 $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)$；

3. 对数函数 $f\left(x\right)=\log_a x$，对于定义域中任意的 x_1，x_2，都有 $f\left(x_1\cdot x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$；

4. 对于 $f(x)$ 定义域中任意的 x_1， x_2，都有 $f\left(x_1+x_2\right)=f\left(x_1\right)\cdot f\left(x_2\right)$，那么 $f(x)$ 有什么性质？可以联想到什么函数？同样若满足 $f\left(x_1\cdot x_2\right)=f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$ 又如何？认真思考以上问题，能够为后续解决抽象函数问题打下基础.

小结

深入理解：指对函数的概念与性质

熟练掌握：指对函数的图象及图象变换

认真体会：分类讨论、数形结合、具体与抽象等思想方法

讲课内容就此结束，下面请结合今天所学完成课后作业和拓展题。