《指数，指数函数的图象与性质》学习指南

一、教学目标

1、通过对有理指数幂定义和性质的复习，能熟练运用有理指数幂运算性质进行化简，求值，提升数学运算素养；

2、通过对 $y=a^{f(x)}$ 型函数的分析，能利用指数函数的图象，掌握指数函数简单变形后的图象和性质。经历由 $y=a^{f(x)}$ 型函数的图像变化过程，发展直观想象，数学抽象，逻辑推理等核心素养。

3、通过对指数函数的概念、图象、性质的学习，培养观察、分析归纳的能力，进一步体会转化的思想方法

二、教学重难点

1、教学重点：掌握指数函数的图象及其简单变形

2、教学难点：能利用指数函数的性质解决基本问题

三、教学过程

（一）知识梳理

1．根式

(1)根式的概念

根式的概念	符号表示	备注
如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根		$n>1$ 且 $n\in N$
当 n 为奇数时，正数的 n 次方根是一个正数，负数的 n 次方根是一个负数	$\sqrt[n]{a}$	零的 n 次方根是0
当 n 为偶数时，正数的 n 次方根有两个，它们互为相反数	$\pm\sqrt[n]{a}(a>0)$	负数没有偶次方根

(2)两个重要的公式

①$(\sqrt[n]{a})^n=a$（注意：a 必须使 $\sqrt[n]{a}$ 有意义）.

②$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & n\text{ 为奇数} \\ |a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases} & n\text{ 为偶数} \end{cases}$$

2． 有理数指数幂

(1)幂的有关概念

①正整数指数幂：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n个}(n\in N^*)$．②零指数幂：$a^0=1(a\neq 0)$．

③负整数指数幂：$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}(a\neq 0,p\in N^*)$．

④正分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in N^*,n>1)$·

⑤负分数指数幂：$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in N^*,n>1)$.

⑥0 的正分数指数幂等于 0， 0 的负分数指数幂没有意义

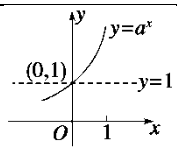
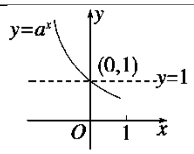
(2)有理数指数幂的性质

①$a^r a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in Q)$；

②$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in Q)$；

③$(ab)^r=a^r b^r(a>0,b>0,r\in Q)$.

3． 指数函数的图象与性质

<table>
<tr><td colspan="2">函数</td><td colspan="2">$y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">图象</td><td>$a>1$</td><td>$0<a<1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>定义域</td><td colspan="2">R</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">(0，＋∞)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">性质</td><td colspan="2">过定点(0,1)</td></tr>
<tr><td>当 $x>0$ 时，$y>1$；
$x<0$ 时，$0<y<1$</td><td>当 $x>0$ 时，$0<y<1$；
$x<0$ 时，$y>1$</td></tr>
<tr><td>在(－∞，＋∞)上是增函数</td><td>在(－∞，＋∞)上是减函数</td></tr>
</table>

（二）例题分析

题型一、指数幂的运算

例 1：化简 $\dfrac{\sqrt{a^3b^2\sqrt[3]{ab^2}}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^4\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}(a,b>0)$

解：$\dfrac{\sqrt{a^3b^2\sqrt[3]{ab^2}}}{(a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{2}})^4\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=\dfrac{\sqrt{a^3b^2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}}{ab^2b^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}}=\dfrac{\sqrt{a^{\frac{10}{3}}b^{\frac{8}{3}}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{7}{3}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{7}{3}}}=ab^{-1}$

小结：指数幂的化简与求值的常用方法：

①化负指数为正指数；

②化根式为分数指数幂；

③化小数为分数

题型二、指数函数的图象

例 2：已知函数 $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x+1|}$.

(1)作出函数的图象(简图)；　　(2)由图象指出其单调区间；

(3)由图象指出当 x 取什么值时有最值，并求出最值.

解析：（1）**方法一**：由函数解析式可得

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|}=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1},(x\geq -1)\\ 3^{x+1},(x<-1)\end{cases}$$

其图象由两部分构成：

一部分是 $y=(\frac{1}{3})^{x}(x\geq 0)$ $\xrightarrow{\text{向左平移 1 个单位}}$ $y=(\frac{1}{3})^{x+1}(x\geq -1)$

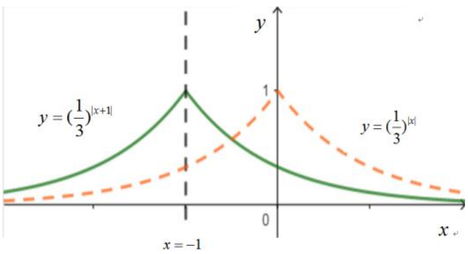
另一部分是 $y=3^{x}(x<0)$ $\xrightarrow{\text{向左平移 1 个单位}}$ $y=3^{x+1}(x<-1)$

方法二:

第一步、由 $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$ 可知函数是偶函数，其图像关于 y 轴对称，

故先作出 $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$ 的图象保留 $x\geq 0$ 的部分，当 $x<0$ 时，其图象是将 $y=(\frac{1}{3})^{x}(x\geq 0)$ 的图象关于 y 轴对折，从而得出 $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$ 的图象。

第二步、将 $y=(\frac{1}{3})^{|x|}$ 的图象向左平移 1 个单位，即可得到 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|}$ 的图象。



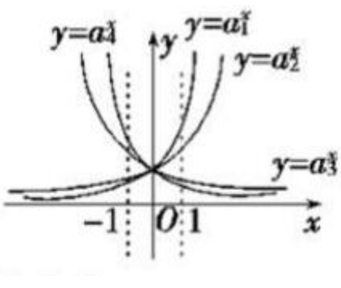
（2）由图象知函数在 $(-\infty,-1]$ 上是增函数，在 $[-1,+\infty)$ 上是减函数。

（3）由图象知当 $x=-1$ 时，有最大值 1，无最小值。

点评：①画指数函数 $y=a^{x}$ 的图象，应抓住关键点 $(0,1)$ 和 a 的范围，由此画出指数函数的大致图象；

②根据三个关键点 $(1,a),(0,1),(-1,\frac{1}{a})$，掌握指数函数图像的位置与底数大小关系

③底数与指数函数的图象相对位置关系由指数函数 $y=a^{x}$ 与直线 $x=1$ 相交于点 $(1,a)$ 可知；在 y 轴右侧，图象从下到上相应的底数由小变大。如图所示的指数函数的底数的大小关系为 $0<a_4<a_3<1<a_2<a_1$



题型三、指数函数的性质

例 3　　已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

（1）判断 $f(x)$ 的奇偶性和单调性；

（2）若对 $x\in[-1,1]$，$f(x)\geq b$ 恒成立，求 b 的取值范围.

解：（1）因为 $f(x)$ 的定义域为 R，且

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数。

因为函数可化为 $f(x)=\dfrac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\dfrac{2}{e^x+1}$，

易知，$y=e^x+1$ 在定义域内是增函数，且 $e^x+1>1$ 恒成立

所以函数 $y=\dfrac{2}{e^x+1}$ 在 R 内是减函数，

则 $f(x)=1-\dfrac{2}{e^x+1}$ 在 R 内是增函数。

（2）因为 $f(x)$ 在 R 内是增函数，所以 $x\in[-1,1]$ 时，$f(-1)\leq f(x)\leq f(1)$

则 $f(x)_{\min}=f(-1)=\dfrac{1-e}{1+e}$

要使 $f(x)\geq b$ 恒成立，只需 $b\leq\dfrac{1-e}{1+e}$

小结：

（1）判断奇偶性时，一定要注意首先判断函数的定义域

（2）解关于函数的不等式问题，可借助函数的单调性解决。