

新定义题型作业答案

1. 设 P, Q 是两个集合, 定义集合 $P-Q = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$, 如果 $P = \{x | \log_2 x < 1\}$, $Q = \{x | |x-2| < 1\}$, 则 $P-Q$ 等于 ()

- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ B. $\{x | 0 < x \leq 1\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 2 \leq x < 3\}$

【解析】依 $P-Q = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$ 可知该集合为在 P 中且不属于 Q 中的元素组成, 或者可以理解为 P 集合去掉 $P \cap Q$ 的元素后剩下的集合。先解出 P, Q 中的不等式。 $P: \log_2 x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$, $Q: |x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3$, 所以 $P \cap Q = (1, 2)$, 从而可得: $P-Q = (0, 1]$, 故选: B。

2. “十二平均律”是通用的音律体系, 明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例, 为这个理论的发展做出了重要贡献, 十二平均律将一个纯八度音程分成十二份, 依次得到十三个单音, 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$. 若第一个单音的频率为 f , 则第八个单音的频率为 ()

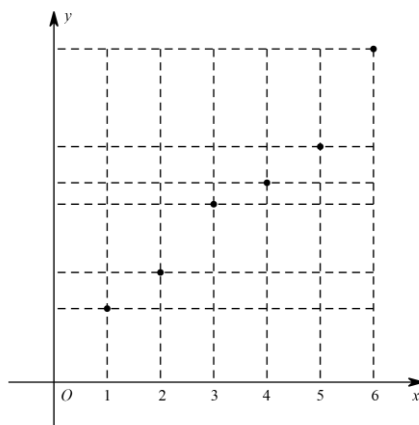
- A. $\sqrt[3]{2}f$ B. $\sqrt[3]{2^2}f$ C. $\sqrt[12]{2^5}f$ D. $\sqrt[12]{2^7}f$

【解析】解: 从第二个单音起, 每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$.

若第一个单音的频率为 f , 则第八个单音的频率为: $(\sqrt[12]{2})^7 \cdot f = \sqrt[12]{2^7}f$. 故选: D.

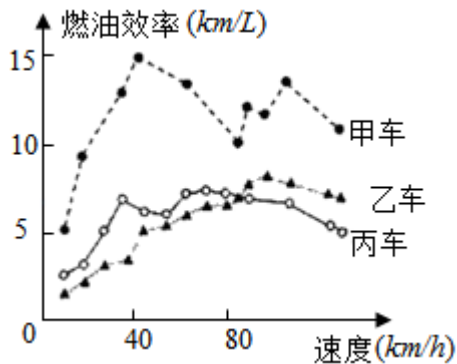
3. 某地区在六年内第 x 年的生产总值 y 单位: 亿元. 与 x 之间的关系如图所示, 则下列四个时段中, 生产总值的年平均增长率最高的是 ()

- A. 第一年到第三年 B. 第二年到第四年
C. 第三年到第五年 D. 第四年到第六年



【答案】A

4. 汽车的“燃油效率”是指汽车每消耗 1 升汽油行驶的里程，如图描述了甲、乙、丙三辆汽车在不同速度下燃油效率情况，下列叙述中正确的是（ ）



- A. 消耗 1 升汽油，乙车最多可行驶 5 千米
- B. 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最多
- C. 某城市机动车最高限速 80 千米/小时，相同条件下，在该市用丙车比用乙车更省油
- D. 甲车以 80 千米/小时的速度行驶 1 小时，消耗 10 升汽油

【解析】解：对于 A，由图象可知当速度大于 40km/h 时，乙车的燃油效率大于 5km/L ，
 $\therefore$ 当速度大于 40km/h 时，消耗 1 升汽油，乙车的行驶距离大于 5km ，故 A 错误；

对于 B，由图象可知当速度相同时，甲车的燃油效率最高，即当速度相同时，消耗 1 升汽油，甲车的行驶路程最远，

$\therefore$ 以相同速度行驶相同路程，三辆车中，甲车消耗汽油最少，故 B 错误；

对于 C，由图象可知当速度小于 80km/h 时，丙车的燃油效率大于乙车的燃油效率，

$\therefore$ 用丙车比用乙车更省油，故 C 正确；

对于 D，由图象可知当速度为 80km/h 时，甲车的燃油效率为 10km/L ，

即甲车行驶 10km 时，耗油 1 升，故行驶 1 小时，路程为 80km ，燃油为 8 升，故 D 错误。

故选：C。

5. 对任意实数 a, b 定义运算 $*$ 如下： $a * b = \begin{cases} a(a \leq b) \\ b(a > b) \end{cases}$ ，则函数 $f(x) = \log_2(3x-2) * \log_{\frac{1}{2}} x$

的值域为（ ）

- A. $[0, +\infty)$
- B. $(-\infty, 0]$
- C. $\left(\log_2 \frac{2}{3}, 0\right)$
- D. $\left(\log_2 \frac{2}{3}, +\infty\right)$

【解析】本题可将 $a * b = \begin{cases} a(a \leq b) \\ b(a > b) \end{cases}$ 描述成取 a, b 中较小的数，即 $\min\{a, b\}$ ，所以对于

$f(x) = \log_2(3x-2) * \log_{\frac{1}{2}} x$ ，即 $f(x_0)$ 为 $\log_2(3x_0-2), \log_{\frac{1}{2}} x_0$ 中较小的数。解不等式

$$\log_2(3x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow \begin{cases} 3x-2 > 0 \\ x > 0 \\ 3x-2 > \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x \geq 1, \text{ 则 } \log_2(3x-2) < \log_{\frac{1}{2}} x \Rightarrow \frac{2}{3} < x < 1, \text{ 所以}$$

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(3x-2), x \geq 1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x, \frac{2}{3} < x < 1 \end{cases}, \text{ 从而可解得值域为 } (-\infty, 0], \text{ 故选 B}$$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $A(a, b)$ ，若函数 $y = f(x)$ 满足： $\forall x \in [a-1, a+1]$ ，都有 $y \in [b-1, b+1]$ ，就称这个函数是点 A 的“限定函数”。以下函数：① $y = \frac{1}{2}x$ ，② $y = 2x^2 + 1$ ，③ $y = \sin x$ ，④ $y = \ln(x+2)$ ，其中是原点 O 的“限定函数”的序号是_____。

- A. ①③ B. ① C. ①② D. ③

【解析】

要判断是否是原点 O 的“限定函数”只要判断： $\forall x \in [-1, 1]$ ，都有 $y \in [-1, 1]$ ，

对于① $y = \frac{1}{2}x$ ，由 $x \in [-1, 1]$ 可得 $y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subseteq [-1, 1]$ ，则①是原点 O 的“限定函数”；

对于② $y = 2x^2 + 1$ ，由 $x \in [-1, 1]$ 可得 $y \in [1, 3] \not\subseteq [-1, 1]$ ，则②不是原点 O 的“限定函数”

对于③ $y = \sin x$ ，由 $x \in [-1, 1]$ 可得 $y \in [-\sin 1, \sin 1] \subseteq [-1, 1]$ ，则③是原点 O 的“限定函数”

对于④ $y = \ln(x+2)$ ，由 $x \in [-1, 1]$ 得 $y \in [0, \ln 3] \not\subseteq [-1, 1]$ ，则④不是原点 O 的“限定函数”

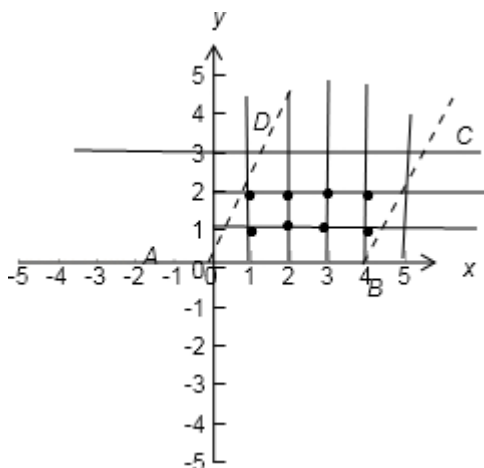
故选：①③；

7. 【2011年北京文科14】设 $A(0, 0)$ ， $B(4, 0)$ ， $C(t+4, 3)$ ， $D(t, 3)$ ($t \in \mathbf{R}$)。记 $N(t)$ 为平行四边形 $ABCD$ 内部（不含边界）的整点的个数，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，则 $N(t)$ 的所有可能取值为()。

- A. 6, 7 B. 6, 7, 8 C. 6, 7, 8, 9 D. 6, 7, 8, 9, 10

【解析】解：作出平行四边形 $ABCD$ ，将边 OD ， BC 变动起来，结合图象得到 $N(t)$ 的所有可

能取值为 6, 7, 8,



8. 设 D 是函数 $y=f(x)$ 定义域内的一个区间, 若存在 $x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = -x_0$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“次不动点”, 也称 $f(x)$ 在区间 D 上存在“次不动点”. 若函数 $f(x) = ax^2 - 3x - a + \frac{5}{2}$ 在区间 $[1, 4]$ 上存在“次不动点”, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(0, \frac{1}{2})$
C. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ D. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

【解析】由题意, 方程 $ax^2 - 3x - a + \frac{5}{2} = -x$ 在区间 $[1, 4]$ 上有解, 显然 $x \neq 1$, 所以方程 $ax^2 - 3x - a + \frac{5}{2} = -x$ 在区间 $(1, 4]$ 上有解, 即求函数 $a = \frac{2x - \frac{5}{2}}{x^2 - 1}$ 在区间 $(1, 4]$ 上的值域,

令 $t = 4x - 5$, 则 $t \in (-1, 11]$, $a = \frac{8t}{t^2 + 10t + 9}$, 当 $t \in (-1, 0]$ 时, $a \leq 0$;

当 $t \in (0, 11]$ 时, $0 < a = \frac{8}{t + \frac{9}{t} + 10} \leq \frac{8}{2\sqrt{t \times \frac{9}{t}} + 10} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $t = 3$ 时取等号.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{2}]$.

9. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果 $\forall x \in D$, $\exists y \in D$, 使 $\frac{f(x) + f(y)}{2} = C$ (C 为常数)

成立, 则称函数 $f(x)$ 在 D 上的均值为 C . 给出下列四个函数: ① $y = x^2$; ② $y = 2^x$; ③ $y = \ln x$;

④ $y = 2\sin x + 1$. 则其中满足在其定义域上均值为 2 的函数是 ().

- A. ① B. ② C. ③ D. ④

【解析】原问题等价于对于任意的 $x_1 \in D$, 存在唯一的 $x_2 \in D$, 使 $f(x_1)+f(x_2)=4$ 成立的函数。

① $y=x^2$, 由 $f(x_1)+f(x_2)=4$ 得 $x_1^2+x_2^2=4$, 此时 $x_2=\pm\sqrt{4-x_1^2}$, 当 $x_1^2>4$ 时, 不存在满足题意的 x_2 , 故不满足条件;

② $y=2^x$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 值域为 $y>0$. 对于 $x_1=3, f(x_1)=8$. 要使 $f(x_1)+f(x_2)=4$ 成立, 则 $f(x_2)=-4$, 不成立;

③ $y=\ln x$, 定义域为 $x>0$, 值域为 $\mathbf{R}$ 且单调, 由 $f(x_1)+f(x_2)=4$ 得 $\ln x_1+\ln x_2=4$, 此时 $x_1 x_2=e^4, x_2=\frac{e^4}{x_1}$.

④ $y=2\sin x+1$, 由 $f(x_1)+f(x_2)=4$ 得 $(2\sin x_1+1)+(2\sin x_2+1)=4$, 此时 $\sin x_1+\sin x_2=2$, 当 $\sin x_1=\frac{1}{2}$ 时, 不存在满足题意的 x_2 , 故不满足条件;

综上可得: 满足在其定义域上均值为 2 的函数是③.

答案: C

10. 如果对定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 对任意两个不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)>x_1 f(x_2)+x_2 f(x_1)$, 则称函数 $f(x)$ 为“H 函数”. 给出下列函数: ① $y=x^2$; ② $y=e^x+1$; ③ $y=2x-\sin x$; ④ $f(x)$

$=\begin{cases} \ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 以上函数是“H 函数”的所有序号为_____.

【答案】②③

【解析】由不等式 $x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)>x_1 f(x_2)+x_2 f(x_1)$,

得 $x_1[f(x_1)-f(x_2)]+x_2[f(x_2)-f(x_1)]>0$, 即 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$.

所以函数 $f(x)$ 为定义域 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数.

① $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 不合题意;

② 因为 $y=e^x+1$, 所以 $y'=e^x>0$, 故该函数在 $\mathbf{R}$ 上为单调增函数, 满足题意;

③ 因为 $y=2x-\sin x$, 所以 $y'=2-\cos x>0$, 故该函数在 $\mathbf{R}$ 上为单调增函数, 满足题意;

④ 显然, 函数 $f(x)$ 为偶函数, 而偶函数在 y 轴两侧的单调性相反, 故不合题意.

综上, ②③为“H 函数”.