

函数新定义拓展提升作业答案

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 如果存在函数 $g(x)$, 使得 $f(x) \geq g(x)$ 对于一切实数 x 都成立, 那么称 $g(x)$ 为函数 $f(x)$ 的一个承托函数. 已知函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(-1, 0)$.

(I) 若 $a=1, b=2$. 写出函数 $f(x)$ 的一个承托函数 (结论不要求注明);

(II) 判断是否存在常数 a, b, c , 使得 $y=x$ 为函数 $f(x)$ 的一个承托函数, 且 $f(x)$ 为函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 的一个承托函数? 若存在, 求出 a, b, c 的值; 若不存在, 说明理由.

解: (I) 答案不唯一, 如函数 $y=0, y=x$ 等.

(II) 因为函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $(-1, 0)$,

$$\text{所以 } a - b + c = 0. \quad \textcircled{1}$$

因为 $y=x$ 为函数 $f(x)$ 一个承托函数, 且 $f(x)$ 为函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 的一个承托函数,

$$\text{所以 } x \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \text{ 对 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立.}$$

$$\text{所以 } 1 \leq f(1) \leq 1, \text{ 即 } f(1) = a + b + c = 1. \quad \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1} \textcircled{2}, \text{ 得 } b = \frac{1}{2}, \quad a + c = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a.$$

$$\text{由 } f(x) \geq x \text{ 对 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立, 得 } ax^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a \geq 0 \text{ 对 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立.}$$

$$\text{当 } a=0 \text{ 时, 得 } -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \geq 0 \text{ 对 } x \in \mathbf{R} \text{ 恒成立, 显然不正确;}$$

$$\text{当 } a \neq 0 \text{ 时, 由题意, 得 } \begin{cases} a > 0, \\ \Delta = \frac{1}{4} - 4a(\frac{1}{2} - a) \leq 0, \end{cases} \text{ 即 } (4a-1)^2 \leq 0,$$

$$\text{所以 } a = \frac{1}{4}.$$

$$\text{代入 } f(x) \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}, \text{ 得 } \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \geq 0,$$

化简, 得 $(x-1)^2 \geq 0$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 符合题意.

$$\text{所以 } a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{4}.$$

2. (2019 朝阳期末) 如果函数 $f(x)$ 在定义域的某个区间 $[m, n]$ 上的值域恰为 $[m, n]$, 则称函数 $f(x)$ 为 $[m, n]$ 上的等域函数, $[m, n]$ 称为函数 $f(x)$ 的一个等域区间.

(I) 已知函数 $f(x) = a^x + (a-k)x + b$, 其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1, k > 0, b \in \mathbf{R}$.

(i) 当 $a = k$ 时, 若函数 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的等域函数, 求 $f(x)$ 的解析式;

(ii) 证明: 当 $0 < a < 1, k \geq a+1$ 时, 函数 $f(x)$ 不存在等域区间;

(II) 判断函数 $g(x) = -\frac{1}{4}\log_2 x$ 是否存在等域区间? 若存在, 写出该函数的一个等域区间; 若不存在, 请说明理由.

解: (I) (i) $a = k$ 时, $f(x) = a^x + b$.

当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 是增函数,

则 $\begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1+b=0, \\ a+b=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-1. \end{cases}$ 符合题意. 此时 $f(x) = 2^x - 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 是减函数, 则 $\begin{cases} f(0) = 1, \\ f(1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1+b=1, \\ a+b=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} a=0, \\ b=0. \end{cases}$ 不符合题意.

综上, $f(x) = 2^x - 1$.

(ii) 证明: 假设 $[m, n]$ 是函数 $f(x)$ 的一个等域区间.

由 $k \geq a+1$, 则 $a-k \leq -1$, 因为 $0 < a < 1$, 所以函数 $f(x)$ 是减函数,

所以 $\begin{cases} f(m) = n, \\ f(n) = m, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a^m + (a-k)m + b = n, \\ a^n + (a-k)n + b = m, \end{cases}$

两式相减得: $a^m - a^n + (a-k)(m-n) = n-m$.

整理得, $a^m - a^n + (a-k+1)(m-n) = 0$.

因为 $m < n$, 所以 $a^m > a^n$, 而 $a-k+1 \leq 0$,

所以 $a^m - a^n + (a-k+1)(m-n) > 0$,

与 $a^m - a^n + (a-k+1)(m-n) = 0$ 矛盾. 假设不成立.

所以函数 $f(x)$ 不存在等域区间.

(II) $g(x) = -\frac{1}{4}\log_2 x$ 是等域函数.

$[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 是该函数的一个等域区间.

这是因为 $g(x)$ 在 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 单调递减, 且 $g(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}, g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$,

所以当定义域为 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 时, 值域也是 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

所以 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 是函数 $g(x) = -\frac{1}{4}\log_2 x$ 的一个等域区间.