

## 函数新定义拓展提升作业

1. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，如果存在函数  $g(x)$ ，使得  $f(x) \geq g(x)$  对于一切实数  $x$  都成立，那么称  $g(x)$  为函数  $f(x)$  的一个承托函数. 已知函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  的图象经过点  $(-1, 0)$ .

- (I) 若  $a=1$ ,  $b=2$ . 写出函数  $f(x)$  的一个承托函数 (结论不要求注明);  
(II) 判断是否存在常数  $a, b, c$ , 使得  $y=x$  为函数  $f(x)$  的一个承托函数, 且  $f(x)$  为函数  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$  的一个承托函数? 若存在, 求出  $a, b, c$  的值; 若不存在, 说明理由.

2. (2019 朝阳期末) 如果函数  $f(x)$  在定义域的某个区间  $[m, n]$  上的值域恰为  $[m, n]$ , 则称函数  $f(x)$  为  $[m, n]$  上的等域函数,  $[m, n]$  称为函数  $f(x)$  的一个等域区间.

- (I) 已知函数  $f(x) = a^x + (a-k)x + b$ , 其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ,  $k > 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$ .  
(i) 当  $a=k$  时, 若函数  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的等域函数, 求  $f(x)$  的解析式;  
(ii) 证明: 当  $0 < a < 1$ ,  $k \geq a+1$  时, 函数  $f(x)$  不存在等域区间;  
(II) 判断函数  $g(x) = -\frac{1}{4} \log_2 x$  是否存在等域区间? 若存在, 写出该函数的一个等域区间; 若不存在, 请说明理由.