

函数新定义题型学习指南

学习目标

了解“新定义”题型的考察方式，通过典型例题的学习，归纳、探索、发现“新定义”解题方法。

学法指导

“新定义”题型是指在题目中定义了教科书中没有学过的一些新概念、新运算、新符号，是高考中的常见题型。“新定义”题型一般会用抽象简洁的语言给出一个新的定义，要求能正确理解定义的含义，并快速应用定义解决有关问题，对数学抽象、数学运算、数学建模、逻辑推理等素养要求较高。

学习任务单

1. 定义一个新运算

例 1（2020 东城期末）对于集合 A ，定义函数 $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \notin A, \\ -1, & x \in A. \end{cases}$

对于两个集合 A, B ，定义运算 $A*B = \{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) = -1\}$ 。

（1）若 $A = \{1, 2, 3\}$ ， $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，写出 $f_A(1)$ 与 $f_B(1)$ 的值，并求出 $A*B$ ；

（2）证明： $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ ；

（3）证明： $*$ 运算具有交换律和结合律，即 $A*B = B*A$ ， $(A*B)*C = A*(B*C)$ 。

解：（1） $f_A(1) = -1$ ， $f_B(1) = 1$ ， $A*B = \{1, 4, 5\}$ 。

（2）①当 $x \in A$ 且 $x \in B$ 时， $f_A(x) = f_B(x) = -1$ 。

所以 $x \notin A*B$ 。所以 $f_{A*B}(x) = 1$ 。

所以 $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ 。

②当 $x \in A$ 且 $x \notin B$ 时， $f_A(x) = -1$ ， $f_B(x) = 1$ 。

所以 $x \in A*B$ 。所以 $f_{A*B}(x) = -1$ 。

所以 $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ 。

③当 $x \notin A$ 且 $x \in B$ 时, $f_A(x)=1, f_B(x)=-1$.

所以 $x \in A*B$. 所以 $f_{A*B}(x)=-1$.

所以 $f_{A*B}(x)=f_A(x) \cdot f_B(x)$.

④当 $x \notin A$ 且 $x \notin B$ 时, $f_A(x)=f_B(x)=1$.

所以 $x \notin A*B$. 所以 $f_{A*B}(x)=1$.

所以 $f_{A*B}(x)=f_A(x) \cdot f_B(x)$.

综上, $f_{A*B}(x)=f_A(x) \cdot f_B(x)$.

(3) 因为 $A*B=\{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x)=-1\}$,

$$B*A=\{x \mid f_B(x) \cdot f_A(x)=-1\}=\{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x)=-1\},$$

所以 $A*B=B*A$.

因为 $(A*B)*C=\{x \mid f_{A*B}(x) \cdot f_C(x)=-1\}=\{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) \cdot f_C(x)=-1\}$,

$$A*(B*C)=\{x \mid f_A(x) \cdot f_{B*C}(x)=-1\}=\{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) \cdot f_C(x)=-1\},$$

所以 $(A*B)*C=A*(B*C)$.

反思提升:本题定义了一个新的运算,出现了课本中没有的概念和运算符号,并相应给出了新运算的运算法则.解题的关键是充分利用第一问中给出的具体集合,理解新运算的运算法则,并快速迁移,从具体到抽象,进一步理解新运算的本质.

2. 引入一个新定义

例2 定义:对于函数 $f(x)$,若在定义域内存在实数 x ,满足 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为“局部奇函数”.

(I) 已知二次函数 $f(x)=ax^2+2x-4a(a \in R, a \neq 0)$,试判断 $f(x)$ 是否为定义域 R 上的“局部奇函数”?若是,求出满足 $f(-x)=-f(x)$ 的 x 的值;若不是,请说明理由;

(II) 若 $f(x)=2^x+m$ 是定义在区间 $[-1,1]$ 上的“局部奇函数”,求实数 m 的取值范围.

解:(I) 当 $f(x)=ax^2+2x-4a(a \in R)$,

方程 $f(x) + f(-x) = 0$ 即 $2a(x^2 - 4) = 0$, 有解 $x = \pm 2$

所以 $f(x)$ 为“局部奇函数”

(II) 当 $f(x) = 2^x + m$ 时, $f(x) + f(-x) = 0$ 可化为 $2^x + 2^{-x} + 2m = 0$

因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$,

所以方程 $2^x + 2^{-x} + 2m = 0$ 在 $[-1, 1]$ 上有解.

令 $t = 2^x \in [\frac{1}{2}, 2]$, 则 $-2m = t + \frac{1}{t}$, 设 $g(t) = t + \frac{1}{t}$,

则 $g(t) = t + \frac{1}{t}$ 在 $t \in (0, 1]$ 上为减函数, 在 $t \in [1, +\infty)$ 上为增函数,

所以当 $t \in [\frac{1}{2}, 2]$ 时, $g(t) \in [2, \frac{5}{2}]$,

所以 $-2m \in [2, \frac{5}{2}]$, 即 $m \in [-\frac{5}{4}, -1]$.

反思提升: 本题引入了一个“新的概念”, 目的是考察学生理解能力和知识的迁移能力。关键是理解“局部奇函数”与“奇函数”的本质区别。要求我们在审题过程中提取关键信息“存在”, 然后转化为熟悉的方程有解的问题。

方法与提升

新定义题型解题步骤:

1. 审题——对新定义进行信息提取
2. 加工——明确新定义的概念、运算、法则、性质的内涵
3. 转化——如果是新定义的运算、法则, 直接按照运算法则计算; 如果是新定义的性质, 一般要判断性质的适用性, 也可用特值排除等方法。

波利亚在《怎样解题》的书中强调过“把解题认为是纯粹的智力活动是错误的。决心和情绪也起了重要的作用, 要解决一个重大的科学问题, 只有靠毅力才能坚持长年累月的艰苦工作, 忍受痛苦的挫折”。新定义题型题意创新, 构思新颖, 对我们的阅读能力, 类比及信息迁移能力要求较高。但这类问题的基础知识和基本方法, 我们在平时的学习中都有迹可循, 只要你基础知识扎实, 克服自己的畏惧心理, 加强训练, 我们一定能找到解决问题的方法。

方法总结

新定义题的难点是理解题意、信息的迁移能力。

新定义一般都是用抽象简洁的语言给出，我们可以借助一个具体的“数”“函数”“集合”来帮助理解新定义的本质。

理解新定义后，要快速应用它解决有关问题，并用抽象的数学符号语言表示，这是另一个难点。