

函数不等式综合拓展提升作业

1. 已知关于 x 的不等式 $x^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)x + 1 < 0$ 的解集为非空集合 $\{x \mid a < x < \frac{1}{a}\}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

2. 函数 $f(x) = \log_2 \sqrt{x} \cdot \log_{\sqrt{2}}(2x)$ 的最小值为_____.

3. 关于函数 $f(x) = \lg \frac{x^2+1}{|x|} (x \neq 0)$, 有下列命题:

①其图象关于 y 轴对称;

②当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 是增函数; 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 是减函数;

③ $f(x)$ 的最小值是 $\lg 2$;

④ $f(x)$ 在区间 $(-1, 0)$, $(2, +\infty)$ 上是增函数;

⑤ $f(x)$ 无最大值, 也无最小值.

其中所有正确结论的序号是_____.

4. 设 a 为实数, 函数 $f(x) = x^2 - 2ax$.

(I) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的值域;

(II) 设函数 $g(x) = |f(x)|$, $t(a)$ 为 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值, 求 $t(a)$ 的最小值.

5. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 5$ (其中 $a > 1$).

(I) 若 $f(x)$ 的定义域和值域均是 $[1, a]$, 求实数 a 的值.

(II) 若 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是减函数, 且对任意的 $x_1, x_2 \in [1, a+1]$, 总有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 4$, 求实数 a 的取值范围.

(III) 若 $f(x)$ 在 $x \in [1, 3]$ 上有零点, 求实数 a 的取值范围.