

函数不等式综合学习指南

学习目标

在函数不等式综合问题中，灵活运用函数单调性和基本不等式求值域或最值，体会解不等式和恒成立问题中数形结合、等价转化的数学思想方法。

学法指导

函数是高中数学的重要主线，不等式是高中数学中具有联结和支撑作用的主干知识。函数不等式的综合问题，大多以能力立意，注重基础，涉及函数的单调性、最值，不等式的性质、解法等重点知识，以及数形结合、等价转化、分类整合等重要方法，是提升逻辑推理素养的重要素材。

学习任务单

1. 二次型

例 1 已知函数 $f(x) = (ax-1)(x+1)$.

(I) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的值域；

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上是减函数，求 a 的取值范围；

(III) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 0$.

解：(I) 当 $a=1$ 时， $f(x) = x^2 - 1$,

函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递减，在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，

所以， $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最小值为 $f(0) = -1$,

又 $f(2) > f(-1)$ ，所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 3$.

$f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的值域为 $[-1, 3]$.

(II) 当 $a=0$ 时， $f(x) = -x-1$ ，在区间 $[-1, +\infty)$ 上是减函数，符合题意.

当 $a \neq 0$ 时，若函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, +\infty)$ 上是减函数，

则 $a < 0$ ，且 $\frac{1}{a} \leq -1$ ，所以 $-1 \leq a < 0$ ，所以 a 的取值范围是 $[-1, 0]$.

(III) 由已知，解不等式 $(ax-1)(x+1) < 0$.

当 $a=0$ 时， $x > -1$.

当 $a > 0$ 时， $(x - \frac{1}{a})(x+1) < 0$ ，解得 $-1 < x < \frac{1}{a}$.

当 $a < 0$ 时， $(x - \frac{1}{a})(x+1) > 0$,

若 $\frac{1}{a} = -1$, 即 $a = -1$ 时, $x \neq -1$;

若 $\frac{1}{a} > -1$, 即 $a < -1$ 时, $x < -1$ 或 $x > \frac{1}{a}$;

若 $\frac{1}{a} < -1$, 即 $-1 < a < 0$ 时, $x < \frac{1}{a}$ 或 $x > -1$.

综上, 当 $a > 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid -1 < x < \frac{1}{a}\}$;

当 $a = 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x > -1\}$;

当 $-1 < a < 0$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x < \frac{1}{a}, \text{ 或 } x > -1\}$;

当 $a = -1$ 时, 不等式的解集为 $\{x \mid x \neq -1\}$;

反思提升: 本题是一个二次型问题, 不论求解不等式还是求参数取值范围, 都要注意二次项系数的讨论; 二次函数问题注意数形结合, 根据画图时遇到的不确定情况自然分类, 分类时要保证不重不漏。

2. 对数、二次、分式等的综合

例 2 已知函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ ($a > 0$). 当点 $M(x, y)$ 在函数 $y = g(x)$ 图象上运动时, 对应的点 $M'(3x, 2y)$ 在函数 $y = f(x)$ 图象上运动, 则称函数 $y = g(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的相关函数.

(I) 解关于 x 的不等式 $f(x) < 1$;

(II) 对任意的 $x \in (0, 1)$, $f(x)$ 的图象总在其相关函数图象的下方, 求 a 的取值范围;

(III) 设函数 $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (0, 1)$. 当 $a=1$ 时, 求 $|F(x)|$ 的最大值.

解: (I) 依题意 $\begin{cases} x+a > 0, \\ \log_2(x+a) < 1, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} x+a > 0, \\ x+a < 2, \end{cases}$ 所以 $-a < x < 2-a$.

所以原不等式的解集为 $\{x \mid -a < x < 2-a\}$

(II) 由题意 $2y = \log_2(3x+a)$, 得 $y = \frac{1}{2} \log_2(3x+a)$.

所以 $f(x)$ 的相关函数为 $g(x) = \frac{1}{2} \log_2(3x+a)$.

依题意, 对任意的 $x \in (0, 1)$, $f(x)$ 的图象总在其相关函数图象的下方,

即当 $x \in (0,1)$, $f(x) < g(x)$ 即 $\log_2(x+a) < \frac{1}{2}\log_2(3x+a)$ 成立.

由 $x+a > 0, 3x+a > 0$, $a > 0$ 得 $x > -\frac{a}{3}$.

在此条件下, 即 $x \in (0,1)$ 时, $\log_2(x+a)^2 < \log_2(3x+a)$ 成立,

即 $(x+a)^2 < 3x+a$, 即 $x^2 + (2a-3)x + a^2 - a < 0$.

设 $h(x) = x^2 + (2a-3)x + a^2 - a$,

要使 $x \in (0,1)$ 时, $h(x) < 0$ 成立,

只需 $\begin{cases} h(0) \leq 0, \\ h(1) \leq 0 \end{cases}$ 成立, 解得 $0 \leq a \leq 1$, 即 a 的取值范围是 $(0,1]$.

(III) 当 $a=1$ 时, 易知在区间 $(0,1)$ 上, $f(x) < g(x)$.

$$\begin{aligned} |F(x)| &= g(x) - f(x) = \frac{1}{2}\log_2(3x+1) - \log_2(x+1) \\ \text{即} \quad &= \frac{1}{2}\log_2(3x+1) - \frac{1}{2}\log_2(x+1)^2 = \frac{1}{2}\log_2 \frac{3x+1}{(x+1)^2}, \text{ 设 } t = \end{aligned}$$

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} (t > 0), \text{ 则 } \frac{1}{t} = \frac{(x+1)^2}{3x+1}.$$

$$\text{令 } 3x+1=u \ (1 < u < 4), \text{ 则 } x = \frac{u-1}{3}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{t} = \frac{\left(\frac{u+2}{3}\right)^2}{u} = \frac{1}{9}\left(u + \frac{4}{u} + 4\right)$$

$$\text{因为 } u + \frac{4}{u} \geq 4 \text{ (当且仅当 } u=2 \text{ 时等号成立)}, \text{ 可得 } \frac{1}{t} \geq \frac{8}{9}$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时等号成立, 满足 } x \in (0,1), \text{ 则 } t \text{ 的最大值为 } \frac{9}{8}.$$

$$\text{所以 } |F(x)| \text{ 的最大值是 } \frac{1}{2}\log_2 \frac{9}{8} = \log_2 3 - \frac{3}{2}.$$

反思提升: 对数型不等式要注意真数大于零, 灵活运用对数运算性质和单调性进行等价转化; 解决综合问题要注意上下问的联系; 函数的最值一般可利用函数单调性或基本不等式进行分析。

方法与提升

综合问题要注意积累基本方法和常用策略。无论看起来多复杂的问题, 也都

需要逐条分析刻画、联系联想一般策略和方法进行解决。不等式和最值通常是用函数单调性和基本不等式，综合问题时一般需要先要运用幂指对三角等的运算性质进行等价转化，再灵活选择换元法、取倒数等手段，还要综合考虑上下问的联系等策略来进行处理。