第十五课时三角恒等变换精讲学习指南--答案及解析

一．典型例题分析：

题型一　三角函数式的化简与求值：

例 1．化简：$\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=$______.

答案　$4\sin\alpha$

解析　$\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=\dfrac{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{\dfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)}=4\sin\alpha$.

例 2．计算$\dfrac{\sin 110°\sin 20°}{\cos^2 155°-\sin^2 155°}$的值为________.

答案　$\dfrac{1}{2}$

解析　$\dfrac{\sin 110°\sin 20°}{\cos^2 155°-\sin^2 155°}=\dfrac{\sin 70°\sin 20°}{\cos 310°}=\dfrac{\cos 20°\sin 20°}{\cos 50°}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin 40°}{\sin 40°}=\dfrac{1}{2}$.

例 3.$\dfrac{\cos 10°-\sqrt{3}\cos(-100°)}{\sqrt{1-\sin 10°}}=$________.

答 案　$\sqrt{2}$　$\dfrac{\cos 10°-\sqrt{3}\cos(-100°)}{\sqrt{1-\sin 10°}}=\dfrac{\cos 10°+\sqrt{3}\cos 80°}{\sqrt{1-\cos 80°}}=\dfrac{\cos 10°+\sqrt{3}\sin 10°}{\sqrt{2}\sin 40°}=$

$\dfrac{2\sin(10°+30°)}{\sqrt{2}\sin 40°}=\sqrt{2}$.

思维升华：解决三角函数的求值问题的关键是把“所求角”用“已知角”表示．①当“已知角”有两个时，“所求角”一般表示为两个“已知角”的和或差的形式；②当“已知角”有一个时，此时应着眼于“所求角”与“已知角”的和或差的关系．

题型二：角的变换：常见的配角技巧：$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$，$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$，$\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\left(\alpha+\dfrac{\beta}{2}\right)-\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)$等．

例 1　已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，求 $\sin\beta$.

答案　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析 由已知可得 $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

$\therefore\sin\beta=\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{7}-\left(-\frac{11}{14}\right)\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例 2.已知 $\cos(75°+\alpha)=\frac{1}{3}$，则 $\cos(30°-2\alpha)$的值为________.

答案 $\frac{7}{9}$

解析 $\cos(75°+\alpha)=\sin(15°-\alpha)=\frac{1}{3}$,

$\therefore\cos(30°-2\alpha)=1-2\sin^2(15°-\alpha)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$.

题型三： 给值求角：

例1. 设 α，β 为钝角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，求 $\alpha+\beta$ 的值。

解析 $\because\alpha$，β 为钝角，$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

又 $\alpha+\beta\in(\pi，2\pi)$，$\therefore\alpha+\beta\in\left(\frac{3\pi}{2}，2\pi\right)$,

$\therefore\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

例2. 已知 α，$\beta\in(0，\pi)$，且 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}$，求 $2\alpha-\beta$ 的值。

解析 $\because\tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]$

$=\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}=\frac{1}{3}>0$,

$\therefore 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

又$\because\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}>0$,

$\therefore 0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\beta}{1+\tan 2\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}=1.$

$\because \tan\beta=-\dfrac{1}{7}<0$，

$\therefore \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$-\pi<2\alpha-\beta<0$，

$\therefore 2\alpha-\beta=-\dfrac{3\pi}{4}.$

题型四： 三角恒等变换的应用：

例1. 已知函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$的值；

(2)求 $f(x)$的最小正周期及单调递增区间.

解 (1)由 $\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，得

$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2.$

(2)由 $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x$ 与 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，得

$f(x)=-\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=-2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right).$

所以 $f(x)$的最小正周期是 π.

由正弦函数的性质，得

$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得$\dfrac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{2\pi}{3}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

所以 $f(x)$的单调递增区间为$\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi，\dfrac{2\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

思维升华 三角恒等变换的应用策略

(1)进行三角恒等变换要抓住：变角、变函数名称、变结构，尤其是角之间的关系；注意公式的逆用和变形使用.

(2)把形如 $y=a\sin x+b\cos x$ 化为 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$，可进一步研究函数的周期性、单调性、最值与对称性.

例 2. 已知函数 $f(x)=4\tan x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}.$

(1)求 $f(x)$的定义域与最小正周期；

(2)讨论 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$上的单调性.

思想方法指导　(1)讨论形如 $y=a\sin\omega x+b\cos\omega x$ 型函数的性质，一律化成 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)$型的函数.

(2)研究 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$型函数的最值、单调性，可将 $\omega x+\varphi$ 视为一个整体，换元后结合 $y=\sin x$ 的图象解决.

规范解答

解　(1)$f(x)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}$.

$f(x)=4\tan x\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$

$=4\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$

$=4\sin x\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)-\sqrt{3}$

$=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2x-\sqrt{3}$

$=\sin 2x+\sqrt{3}(1-\cos 2x)-\sqrt{3}$

$=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.[5 分]

所以 $f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.[6 分]

(2)因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$，所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right]$，[8 分]

由 $y=\sin x$ 的图象可知，当 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2}\right]$，

即 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{12}\right]$时，$f(x)$单调递减；

当 $2x-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}\right]$，即 $x\in\left[-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}\right]$时，$f(x)$单调递增．[10 分]

所以当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$时，$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{12},\ \frac{\pi}{4}\right]$上单调递增，在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{12}\right]$上单调递减.

例 3 解：（Ⅰ） $f(x)=4\sin(\pi-x)\sin(\frac{\pi}{3}+x)-1$

$$=4\sin x(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x)-1$$

$$=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2 x-1$$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x \quad =2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）因为 $x\in[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$，所以 $2x-\frac{\pi}{6}\in[0,\frac{5\pi}{6}]$.

所以当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(x)$ 取得最大值为 2；

当 $2x-\frac{\pi}{6}=0$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最小值为 0 .

二．能力提升训练

1. 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $3\cos 2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，求 $\sin 2\alpha$ 的值。

解析　由 $3\cos 2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ 可得

$3(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，

又由 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 可知 $\cos\alpha-\sin\alpha\neq 0$，

于是 $3(\cos\alpha+\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{18}$，故 $\sin 2\alpha=-\frac{17}{18}$.

2．已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{4}$，则 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值为________.

解析　因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$

$=\frac{1}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{1}{4}$.

所以 $\cos 2\theta=\frac{1}{2}$.

故 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2$

$=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{5}{8}$.

3.在斜△ABC 中，$\sin A=-\sqrt{2}\cos B\cos C$，且 $\tan B\tan C=1-\sqrt{2}$，求角 A 的值.

解析　由已知 $\sin(B+C)=-\sqrt{2}\cos B\cos C$，

$\therefore\sin B\cos C+\cos B\sin C=-\sqrt{2}\cos B\cos C$，

$\therefore\tan B+\tan C=-\sqrt{2}$，

又 $\tan B\tan C=1-\sqrt{2}$，

$\therefore\tan(B+C)=\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-1$，　　$\therefore\tan A=1$，又 $0<A<\pi$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$.