5.5 三角恒等变换精讲--学习指南

【学习目标】

进一步巩固两角和与差的三角函数公式、二倍角公式，掌握公式的正用、逆用以及变式运用，并能利用上述公式进行三角函数的化简与求值；并会能正确对形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的三角函数的性质进行讨论，能灵活利用公式，通过三角恒等变形解决相关三角函数的最值，周期，单调性等问题。

【学法指导】

三角恒等变换与代数变换一样，本质是“变其形不变其质”。三角恒等变换的对象是三角函数式，变换的实质是恒等变换。所以需要大家根据所要求解的问题对三角函数式进行合理变换，需明确以下思维流程（图 1 ）：

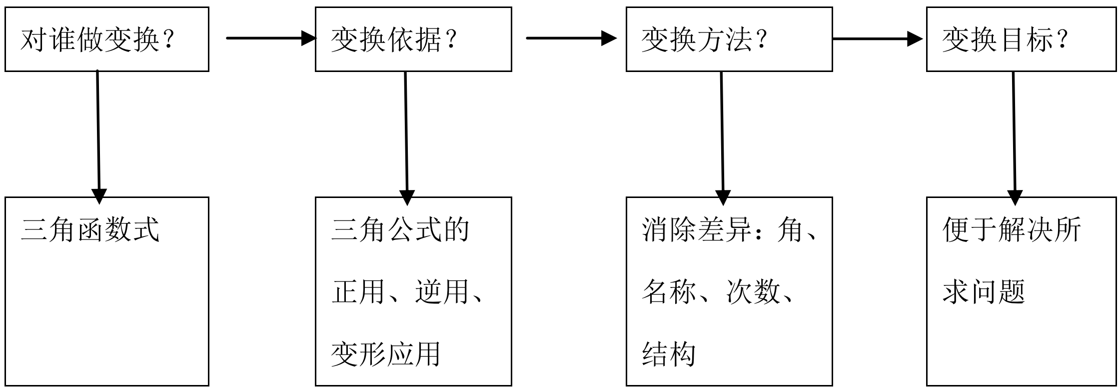

图 1

从思维层面上说，首先明确观察的对象（三角函数式）、观察的角度（角的差别、三角函数名称差别、次数差别、结构差别），重点是分析所求问题与已知之间的差别，后以三角恒等变换公式为基础，灵活运用。然后以三角恒等变换公式为基础，灵活运用三角恒等变换的常用思维策略，解决问题。

因此通过本节的复习，需要大家体会如何对变换对象进行对比分析，体会解题过程中如何选择公式，如何根据问题的条件进行公式变形，以及变换过程中体现的换元、逆向使用公式等数学思想方法的认识，从而加深理解三角恒等变换思想，加强转化与化归思想的应用意识，提高推理能力.

【学习过程】

一．典型例题分析：

题型一　三角函数式的化简与求值：

思路探求：在解三角函数式的化简与求值问题时，首先要观察式子的结构形式，处理原则是从复杂到简单，高次降低，复角化单角，一般步骤是：

1. 先观察，找出角、函数名称、式子结构等方面的差异；

2. 本着“复角化单角” “异角化同角”“异名化同名”“变换式子结构”“变量集中”等原则，设法消除差异，达到化简求值的目的.

例1．化简：$\dfrac{2\sin(\pi-\alpha)+\sin 2\alpha}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=$______.

例2．计算$\dfrac{\sin 110^\circ\sin 20^\circ}{\cos^2 155^\circ-\sin^2 155^\circ}$的值为________.

例3. $\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\cos(-100^\circ)}{\sqrt{1-\sin 10^\circ}}=$________.

题型一解题反思：

化简问题中的“三变”

(1)变角：三角变换时通常先寻找式子中各角之间的联系，充分利用诱导公式，通过拆、凑等手段消除角之间的差异，合理选择联系它们的公式.

(2)变名：观察三角函数种类的差异，尽量统一函数的名称，如统一为弦或统一为切.

(3)变式：观察式子的结构形式的差异，选择适当的变形途径，如升幂、降幂、配方、开方等.

（4）常数变换：需要将问题中常数写为某个三角函数值，例如$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

题型二：角的变换：

思路探求：从函数概念角度考虑：三角函数的自变量是角，角就成为分析变换的第一个要点。对于一个角，我们要分析它的范围，对于不同的角，我们就要分析它们间的关系。这

是数学研究的基本思维。而我们关注角的几个角度是：已知角与所求角之间的互补、互余关系；角之间进行和、差、乘积运算后是否得到所求角；角与特殊角进行运算得到什么角？

例 1.已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{11}{14}$，求 $\sin\beta$.

例 2.已知 $\cos(75°+\alpha)=\dfrac{1}{3}$，则 $\cos(30°-2\alpha)$的值为________.

题型二解题反思：

给值求值问题的解题策略

(1)已知某些角的三角函数值，求另外一些角的三角函数值时，要注意观察已知角与所求表达式中角的关系，将“未知角”分解为“已知角”的“和、差、倍、半角”，然后运用相关公示解决问题。

(2)由于和、差角与单角是相对的，因此解题过程中可以根据需要灵活地进行拆角或凑角.常见角的变换有：

①$\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$；

②$\alpha=\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}$；

③$2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$；

④$2\beta=(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)$.

题型三：　给值求角：

思路探求：求角的方法，先求角的一种三角函数值；再确定角的范围。

例1. 设 α，β 为钝角，且 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，求 $\alpha+\beta$ 的值。

例2. 已知 α，$\beta\in(0，\pi)$，且 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}$，求 $2\alpha-\beta$ 的值。

题型三解题反思：

已知三角函数值求角的解题步骤

(1)界定角的范围，根据条件确定所求角的范围.

(2)求所求角的某种三角函数值.为防止增解最好选取在范围内单调的三角函数.

(3)结合三角函数值及角的范围求角.判断角的范围的方法有：①三角函数值的正负；②利用三角函数单调性与特殊角比较三角函数值的大小

题型四：　三角恒等变换的应用：

例1.　已知函数 $f(x)=\sin^2x-\cos^2x-2\sqrt{3}\sin x\cos x(x\in\mathbf{R})$.

(1)求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$的值；

(2)求 $f(x)$的最小正周期及单调递增区间.

思路探求：第（2）问根据求解目标，一般是把函数式化为：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的形式，观察 $f(x)$ 的解析式，由 $\sin^2x-\cos^2x$ 能想到哪个公式？由 $\sin x\cos x$ 能想到哪个公式？$f(x)=-\cos2x-\sqrt{3}\sin2x$ 通常运用哪个公式化为一个角的三角函数形式 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$？这样思路就建构起来了。

解题反思：

1.三角恒等变换与三角函数图象性质的综合问题的解题策略：

运用三角函数的和、差、倍角公式将函数关系式化成 $y=a\sin\omega x+b\cos\omega x+k$ 的形式，借助辅助角公式化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$(或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+k$)的形式，将 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体研究函数的性质.

2.与正弦、余弦函数有关的单调区间的求解技巧

(1)结合正弦、余弦函数的图象，熟记它们的单调区间.

(2)确定函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0，\omega>0)$单调区间的方法：采用“换元”法整体代换，将

$\omega x+\varphi$ 看作一个整体，可令“$z=\omega x+\varphi$”，即通过求 $y=A\sin z$ 的单调区间而求出函数的单调区间．若 $\omega<0$，则可利用诱导公式先将 x 的系数转变为正数，再求单调区间．

3.辅助角公式及其运用

(1)公式形式：公式 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$(或 $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi)$)将形如 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$(a，b 不同时为零)的三角函数式收缩为同一个角的一种三角函数式.

(2)形式选择：化为正弦还是余弦，要看具体条件而定，一般要求变形后角 α 的系数为正，这样更有利于研究函数的性质.

例 2. 已知函数 $f(x)=4\tan x\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}$.

(1)求 $f(x)$的定义域与最小正周期；

(2)讨论 $f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$上的单调性.

例 3　已知函数 $f(x)=4\sin(\pi-x)\sin(\frac{\pi}{3}+x)-1$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间$[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}]$上的最大值和最小值.

四．能力提升训练

1. 若 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}，\pi\right)$，且 $3\cos 2\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$，求 $\sin 2\alpha$ 的值。

2．已知 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\frac{1}{4}$，则 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值为________.

3.在斜△ABC 中，$\sin A=-\sqrt{2}\cos B\cos C$，且 $\tan B\tan C=1-\sqrt{2}$，求角 A 的值.

五．小结：

1. 三角恒等变换的常用方法：

(1) 三角函数式的化简要遵循“三看”原则：一看角，二看名，三看式子结构与特征．尤其是角之间的关系,注意公式的逆用和变形使用.三角函数式的化简要注意观察条件中角之间的联系(和、差、倍、互余、互补等)，寻找式子和三角函数公式之间的共同点.

三角函数式化简方法

（1）直接运用公式进行降次、消项；

（2）异名化同名，异角化同角，化切为弦；

（3）活用公式（正用、逆用、变形用），活用角变换等

三角函数式化简要求

（1）能求值的要求值；（2）三角函数种类要最少；

（3）项数要尽量少；　（4）尽量使分母不含三角函数；

（5）尽量使被开方数不含三角函数.

有关正、余弦型函数性质的研究，如周期性、单调性、值域与最值、

(2)把形如 $y=a\sin x+b\cos x$ 化为 $y=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$，可进一步研究函数的周期性、单调性、最值与对称性.

2 规律总结：

(1)在有关转化为正（余）弦型函数的三角恒等变换中，二倍角正余、弦公式、辅助角公式是常用公式，需要学生很好、灵活的掌握，尤其是公式的逆用或者变形应用；

(2)有关正、余弦型函数性质的研究，如周期性、单调性、值域与最值、对称性学生必须有清晰的解题思路，同时需要学生理解题目考查的到底是什么问题；