高一年级数学第 14 课时三角函数的图象与性质精讲学习指南答案

学习目标：

1. 能利用单位圆的性质研究正弦、余弦函数的性质；

2. 理解三角函数的性质，能通过整体代换与数形结合的思想，解决相关三角函数性质的问题；

3. 体会函数图象的重要地位，提升几何直观、代数运算的数学素养.

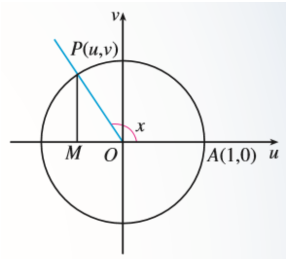
学法指导：

灵活运用三角函数图象与性质，自主学习例题，完成学习任务单，并利用课后作业进行自我检测.

学习任务单：

一、复习内容回顾

知识点：利用单位圆的性质研究正弦、余弦函数的性质



如右图，在直角坐标系 uOv 中，角 x 的顶点与原点重合，始边与 Ou 轴重合，终边与单位圆交于点 $P(\cos x,\sin x)$. 当角 x 的终边绕原点从 Ou 轴的正半轴开始，按照逆时针方向旋转时，点 P 的横、纵坐标的变化规律是什么呢？

横坐标：$\underline{1\to 0\to -1\to 0\to 1\cdots}$；

纵坐标：$\underline{0\to 1\to 0\to -1\to 0\cdots}$.

由此，我们能否研究出正弦、余弦函数的其它性质呢？

（1）周期性：自变量每增加 $\underline{2\pi}$，余弦、正弦函数值重复出现，所以余弦、正弦函数的周期都是 $\underline{2\pi}$.

（2）奇偶性：

角 x、角 $-x$ 与单位圆的交点 $P(\cos x,\sin x)$、$P'(\cos(-x),\sin(-x))$ 关于 Ou 轴对称，所以 $\underline{\cos(-x)=\cos x,\sin(-x)=-\sin x}$，所以余弦函数为偶函数，正弦函数为奇函数.

（3）单调性：

余弦函数的单调性：

角 x	$2k\pi \to 2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$2k\pi+\frac{\pi}{2} \to 2k\pi+\pi$	$2k\pi+\pi \to 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$	$2k\pi+\frac{3\pi}{2} \to 2k\pi+2\pi$
P 点横坐标的变化	$1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$
$\cos x$ 的单调性	单调递减	单调递减	单调递增	单调递增

正弦函数的单调性：

角 x	$2k\pi \to 2k\pi+\frac{\pi}{2}$	$2k\pi+\frac{\pi}{2} \to 2k\pi+\pi$	$2k\pi+\pi \to 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$	$2k\pi+\frac{3\pi}{2} \to 2k\pi+2\pi$
P 点纵坐标的变化	$0 \to 1$	$1 \to 0$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\sin x$ 的单调性	单调递增	单调递减	单调递减	单调递增

（4）最值：

余弦函数的最值：

角 x	$\pi+2k\pi$	$2k\pi$
P 点横坐标	-1	1
$\cos x$	最小值	最大值

正弦函数的最值：

角 x	$-\frac{\pi}{2}+2k\pi$	$\frac{\pi}{2}+2k\pi$
P 点纵坐标	-1	1
$\sin x$	最小值	最大值

二、典型例题分析

例 1：函数 $y=\lg(\sin x)+\sqrt{\cos x-\frac{1}{2}}$ 的定义域为_________.

【思路点拨】函数的定义域，即为使函数解析式有意义的自变量的集合.

【答案】$\left\{x \middle| 2k\pi < x \le \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

【解析】方法 1：结合正、余弦函数图象知，要使函数有意义，

则$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x - \dfrac{1}{2} \ge 0 \end{cases}$即$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$,

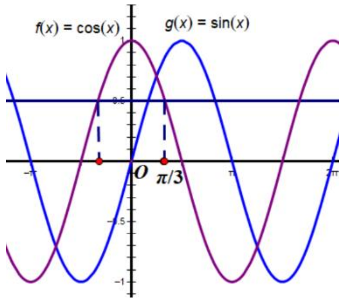
解得$\begin{cases} 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \\ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}(k \in \mathbf{Z})$.

所以$2k\pi < x \le \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi(k \in \mathbf{Z})$,

故函数的定义域为$\left\{x \middle| 2k\pi < x \le \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

方法 2：在同一坐标系内分别作出正、余弦函数的图象，结合图象可得，函数定义域为

$\left\{x \middle| 2k\pi < x \le \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\right\}$.



【反思与感悟】三角函数定义域的求法

求三角函数定义域实际上是构造简单的三角不等式(组)，常借助三角函数定义或三角函数图象来求解.

例 2：已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x, x \in \mathbf{R}$.

（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期;

（2）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

（3）求函数 $f(x)$ 的对称轴和对称中心;

（4）当 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最值及此时 x 对应的值.

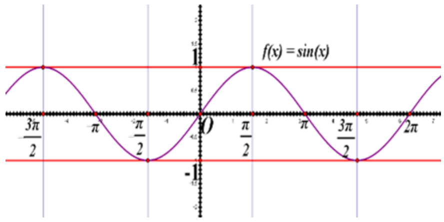
【思路点拨】把函数解析式化为 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + k$ 的形式，利用整体代换思想解决问题.

（1）【思路点拨】利用降幂公式.

【解析】
$$\because f(x)=\cos^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$$

$\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，即函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

（2）【思路点拨】代换法：把含自变量的代数式 $\omega x+\varphi$ 整体当作一个角 u（或 t），利用正弦函数的单调性列不等式求解.



【解析】由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $-\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi$

故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

（3）【思路点拨】同（2），利用整体代换及正弦函数性质求解.

令 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得对称轴方程为 $x=\dfrac{\frac{\pi}{2}+k\pi-\phi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$；

令 $\omega x+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得对称中心为 $\left(\frac{k\pi-\phi}{\omega},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

【解析】由 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，

由 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，得 $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，

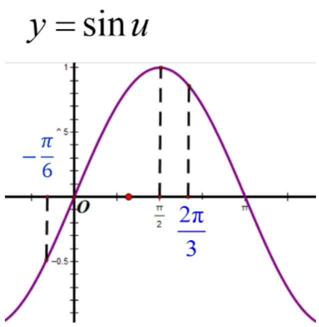
故函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{1}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

【易错点】对称中心的纵坐标.

（4）【思路点拨】由自变量 x 的取值范围，得出 $\omega x+\varphi$ 整体的范围，根据正弦函数单调性写出函数的最值.

【解析】令 $u=2x+\frac{\pi}{6}$，

$\because -\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{4},\therefore -\dfrac{\pi}{6}\le u\le\dfrac{2\pi}{3}$，



结合 $y=\sin u$ 的图象可知，

当 $u=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ **时，** $f(x)_{\max}=\sin\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$;

当 $u=-\dfrac{\pi}{6}$，即 $x=-\dfrac{\pi}{6}$ **时，** $f(x)_{\min}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0.$

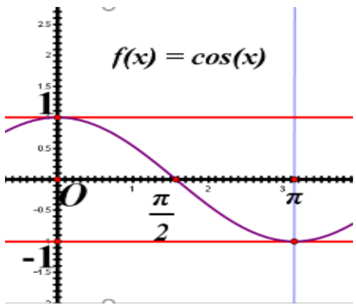
【反思与感悟】研究三角函数的性质，通常利用三角恒等变换，把函数解析式化为“一角一名一次式”，即 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的形式，再结合三角函数的图象和性质，利用整体代换思想解决问题.

例 3：函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{3}{4}\left(x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\right)$ 的最大值是______ .

【思路点拨】利用同角三角函数基本关系式，把解析式化为关于 $\cos x$ 的一元二次形式.

【答案】1 .

【解析】依题意，



$$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{4}=-\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x+\frac{1}{4}$$

$$=-\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$$

因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $\cos x\in[0,1]$，因此当 $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$f(x)_{\max}=1.$

【反思与感悟】三角函数值域或最值的常见求法

直接法	形如 $y=a\sin x+k$ 或 $y=a\cos x+k$ 的三角函数，直接利用 $\sin x,\cos x$ 的值域求出.
化一法	形如 $y=a\sin x+b\cos x+k$ 的三角函数，化为 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 的形式，确定 $\omega x+\varphi$ 的范围，根据正弦函数单调性写出函数的值域(最值).
换元法	形如 $y=a\sin^2 x+b\sin x+k$ 的三角函数，可先设 $\sin x=t$，化为关于 t 的二次函

	数求值域(最值).

三、小结与反思

1. 利用单位圆的性质研究正弦、余弦函数的性质;

2. 灵活运用三角恒等变换公式;

3. 整体代换与数形结合思想的应用.